Kode/Nama Rumpun : 772/Pendidikan Matematika
Bidang Fokus : Sosial Humainora, Seni Budaya, Pendidikan
Penelitian Lapangan Dalam Negeri (Kecil)

LAPORAN AKHIR
PENELITIAN KERJASAMA ANTAR PERGURUAN TINGGI (PKPT)

JUDUL PENELITIAN
PENGEMBANGAN E-MODUL ALJABAR LINEAR BERBASIS SOCRATES BERBANTU APLIKASI ANDROID UNTUK MENINGKATKAN KETERAMPILAN BERPIKIR KRITIS DAN HASIL BELAJAR MAHASISWA

Dibiayai oleh:
Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat
Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan
Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi
Sesuai dengan Kontrak Penugasan Pelaksanaan Program Penelitian
Nomor : 1230/SP2H/LT/LL2/2021 Tanggal 16 April 2021

TIM PELAKSANA

Ira Vahlia, M. Pd.	**NIDN. 0206128901**
Dr. Dwi Rahmawati, M. Pd.	**NIDN. 0210048303**
Mustika, M. Kom.	**NIDN. 0204038302**
Dr. Tina Yunarti, M. Si.	**NIDN. 0010066601**
Dr. Nurhanurawati, M. Pd.	**NIDN. 0008086703**

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO
NOVEMBER 2021

HALAMAN PENGESAHAN

Judul	: Pengembangan E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates Berbantu Aplikasi Android untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis dan Hasil Belajar Mahasiswa
Peneliti/Pelaksana	
Nama Lengkap	: IRA VAHLIA, S.Pd, M.Pd
Perguruan Tinggi	: Universitas Muhammadiyah Metro
NIDN	: 0206128901
Jabatan Fungsional	: Lektor
Program Studi	: Pendidikan Matematika
Nomor HP	: 085768428721
Alamat surel (e-mail)	: iravahlia768@yahoo.co.id
Anggota (1)	
Nama Lengkap	: Dr. DWI RAHMAWATI S.Pd, M.Pd
NIDN	: 0210048303
Perguruan Tinggi	: Universitas Muhammadiyah Metro
Anggota (2)	
Nama Lengkap	: MUSTIKA M.Kom
NIDN	: 0204038302
Perguruan Tinggi	: Universitas Muhammadiyah Metro
Anggota (3)	
Nama Lengkap	: Dr. Dra TINA YUNARTI M.Si
NIDN	: 0010066601
Perguruan Tinggi	: Universitas Lampung
Anggota (4)	
Nama Lengkap	: Dr Dra Dr NURHANURAWATI M.Pd
NIDN	: 0008086703
Perguruan Tinggi	: Universitas Lampung
Institusi Mitra (jika ada)	
Nama Institusi Mitra	: -
Alamat	: -
Penanggung Jawab	: -
Tahun Pelaksanaan	: Tahun ke 1 dari rencana 2 tahun
Biaya Tahun Berjalan	: Rp 105,230,000
Biaya Keseluruhan	: Rp 105,230,000

Mengetahui, Dekan	Metro, 15 - 11 - 2021 Ketua,
(Drs. Partono, M. Pd.) NIP/NIK 196604131991031003	(IRA VAHLIA, S.Pd, M.Pd) NIP/NIK 0206128901

Menyetujui,
Ketua LPPM

(Dr. Achyani, M. Si.)
NIP/NIK 19640815 198903 1 003

LAPORAN AKHIR PENELITIAN MULTI TAHUN

ID Proposal: e1f0c564-dd84-400e-b8d2-af5ee6416ed7
Laporan Akhir Penelitian: tahun ke-1 dari 2 tahun

1. IDENTITAS PENELITIAN

A. JUDUL PENELITIAN

Pengembangan E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates Berbantu Aplikasi Android untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis dan Hasil Belajar Mahasiswa

B. BIDANG, TEMA, TOPIK, DAN RUMPUN BIDANG ILMU

Bidang Fokus RIRN / Bidang Unggulan Perguruan Tinggi	Tema	Topik (jika ada)	Rumpun Bidang Ilmu
Sosial Humaniora, Seni Budaya, Pendidikan Penelitian Lapangan Dalam Negeri (Kecil)	Pendidikan	Teknologi pendidikan dan pembelajaran	Matematika

C. KATEGORI, SKEMA, SBK, TARGET TKT DAN LAMA PENELITIAN

Kategori (Kompetitif Nasional/ Desentralisasi/ Penugasan)	Skema Penelitian	Strata (Dasar/ Terapan/ Pengembangan)	SBK (Dasar, Terapan, Pengembangan)	Target Akhir TKT	Lama Penelitian (Tahun)
Penelitian Kompetitif Nasional	Penelitian Kerjasama Antar Perguruan Tinggi	SBK Riset Dasar	SBK Riset Dasar	3	2

2. IDENTITAS PENGUSUL

Nama, Peran	Perguruan Tinggi/ Institusi	Program Studi/ Bagian	Bidang Tugas	ID Sinta	H-Index
IRA VAHLIA Ketua Pengusul	Universitas Muhammadiyah Metro	Pendidikan Matematika		5975837	0
Dr. DWI RAHMAWATI S.Pd, M.Pd Anggota Pengusul 1	Universitas Muhammadiyah Metro	Pendidikan Matematika	- Membantu ketua peneliti dalam menganalisis kebutuhan sumber belajar yang ada - Menganalisis karakteristik mahasiswa dalam menggunakan sumber belajar - Membantu ketua peneliti dalam mengembangkan e-modul berbantu	5978519	0

			aplikasi android		
MUSTIKA M.Kom Anggota Pengusul 2	Universitas Muhammadiyah Metro	Ilmu Komputer	-Mendesain e-modul berbantu aplikasi android -Membantu ketua peneliti dalam melakukan uji coba aplikasi android serta merevisi produk sampai dengan layak digunakan -Membantu ketua dan anggota TPP untuk mengimplementasikan e-modul berbantu aplikasi android	5974722	0
Dr. Dra TINA YUNARTI M.Si Ketua TPM 1	Universitas Lampung	Pendidikan Matematika	- Memberikan gambaran tentang metode socrates yang akan diimplementasikan kepada mahasiswa - Bersama dengan TPP dan anggota TPM merancang materi berbasis metode socrates - Bersama dengan TPP dan anggota TPM melakukan uji coba lapangan pada mahasiswa untuk mendapatkan produk yang layak - Bersama dengan TPP dan anggota TPM yaitu menganalisis hasil implementasi e-modul berbantu aplikasi android	6037358	1
Dr Dra Dr NURHANURAWATI M.Pd Anggota TPM 1	Universitas Lampung	Pendidikan Matematika	: - Memberikan gambaran tentang metode socrates yang akan diimplementasikan kepada mahasiswa - Bersama dengan TPP dan ketua TPM merancang materi berbasis metode socrates - Bersama dengan TPP dan ketua TPM melakukan uji coba lapangan pada mahasiswa untuk mendapatkan produk yang layak - Bersama dengan TPP dan ketua TPM yaitu menganalisis hasil implementasi e-modul berbantu aplikasi	6682423	0

			android		

3. MITRA KERJASAMA PENELITIAN (JIKA ADA)

Pelaksanaan penelitian dapat melibatkan mitra kerjasama, yaitu mitra kerjasama dalam melaksanakan penelitian, mitra sebagai calon pengguna hasil penelitian, atau mitra investor

Mitra	Nama Mitra
Mitra Pelaksana Penelitian	Dosen Pendidikan Matematika

4. LUARAN DAN TARGET CAPAIAN

Luaran Wajib

Tahun Luaran	Jenis Luaran	Status target capaian (*accepted, published, terdaftar atau granted, atau status lainnya*)	Keterangan (*url dan nama jurnal, penerbit, url paten, keterangan sejenis lainnya*)
1	Buku Ajar	Online ber ISBN	Penerbit Anggota IKAPI (Ikatan Penerbit Indonesia)

Luaran Tambahan

Tahun Luaran	Jenis Luaran	Status target capaian (*accepted, published, terdaftar atau granted, atau status lainnya*)	Keterangan (*url dan nama jurnal, penerbit, url paten, keterangan sejenis lainnya*)
1	Artikel di Jurnal Nasional terakreditasi peringkat 1-3	Accepted	Al-Jabar Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung
1	Artikel di jurnal internasional	Accepted	IEJME
1	Buku Ajar	Terbit ber ISBN	LPPM UM METRO PRESS

5. ANGGARAN

Rencana anggaran biaya penelitian mengacu pada PMK yang berlaku dengan besaran minimum dan maksimum sebagaimana diatur pada buku Panduan Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Edisi 12.

Total RAB 2 Tahun Rp. 335,375,000

Tahun 1 Total Rp. 149,900,000

Jenis Pembelanjaan	Komponen	Item	Satuan	Vol.	Biaya Satuan	Total
Bahan	ATK	ATK	Paket	1	3,000,000	3,000,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Fotokopi Bahan Ajar	Unit	1	2,000,000	2,000,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Validasi Bahan Ajar	Unit	5	500,000	2,500,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Validasi Aplikasi	Unit	3	500,000	1,500,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Validasi TTG	Unit	3	400,000	1,200,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Validasi Soal-Soal Metode Socrates	Unit	3	400,000	1,200,000

Jenis Pembelanjaan	Komponen	Item	Satuan	Vol.	Biaya Satuan	Total
Pengumpulan Data	FGD persiapan penelitian	Koordinasi Persiapan Penelitian	Paket	1	5,000,000	5,000,000
Pengumpulan Data	HR Pembantu Peneliti	Dokumentasi	OJ	100	25,000	2,500,000
Pengumpulan Data	HR Sekretariat/Administrasi Peneliti	Surat Menyurat dan Arsip Penelitian	OB	5	300,000	1,500,000
Pengumpulan Data	Transport	Koordinasi dengan TPM	OK (kali)	30	100,000	3,000,000
Pengumpulan Data	Transport	Validasi Bahan Ajar	OK (kali)	10	500,000	5,000,000
Pengumpulan Data	Tiket	Analisis Data	Ok (kali)	3	1,500,000	4,500,000
Pengumpulan Data	Biaya konsumsi	Membuat buku aljabar	OH	25	500,000	12,500,000
Pengumpulan Data	HR Pembantu Lapangan	Observer Penelitian	OH	500	80,000	40,000,000
Sewa Peralatan	Peralatan penelitian	Alat Perekam	Unit	10	1,000,000	10,000,000
Sewa Peralatan	Transport penelitian	Mobil	Unit	10	500,000	5,000,000
Analisis Data	HR Pengolah Data	Data hasil penelitian	OP	3	1,500,000	4,500,000
Analisis Data	Honorarium narasumber	Materi Socrates	OJ	2	2,000,000	4,000,000
Analisis Data	Biaya analisis sampel	Hasil Uji Coba	Unit	3	1,000,000	3,000,000
Analisis Data	Transport Lokal	Uji Efektivitas Bahan Ajar	OK (kali)	8	100,000	800,000
Analisis Data	Biaya konsumsi rapat	Rapat Hasil Penelitian	OH	25	500,000	12,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan Draft Laporan Kemajuan	OH	5	300,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan Draft Laporan Keuangan	OH	5	300,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan Bahan Ajar	OH	5	300,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya Publikasi artikel di Jurnal Nasional	Pembayaran Publikasi Artikel	Paket	1	3,000,000	3,000,000
Pelaporan,	Publikasi artikel di Jurnal	Pembayaran	Paket	1	7,000,000	7,000,000

Jenis Pembelanjaan	Komponen	Item	Satuan	Vol.	Biaya Satuan	Total
Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Internasional	Publikasi Artikel				
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Luaran KI (paten, hak cipta dll)	Penyusunan Draft HKI	Paket	1	1,500,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Luaran KI (paten, hak cipta dll)	Penerbitan Sertifikat HKI	Paket	1	1,000,000	1,000,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya Luaran Iptek lainnya (purwa rupa, TTG dll)	Penyusunan Draft TTG	Paket	1	2,000,000	2,000,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya Luaran Iptek lainnya (purwa rupa, TTG dll)	Desain Aplikasi	Paket	1	2,000,000	2,000,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya Luaran Iptek lainnya (purwa rupa, TTG dll)	Biaya Pendaftaran E-Modul Online ber ISSN	Paket	1	200,000	200,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya Luaran Iptek lainnya (purwa rupa, TTG dll)	Pembuatan uji produk	Paket	3	1,000,000	3,000,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya Luaran Iptek lainnya (purwa rupa, TTG dll)	Desain Cover Bahan Ajar	Paket	1	500,000	500,000

Tahun 2 Total Rp. 185,475,000

Jenis Pembelanjaan	Komponen	Item	Satuan	Vol.	Biaya Satuan	Total
Bahan	ATK	ATK	Paket	1	3,000,000	3,000,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Fotokopi	Paket	1	2,000,000	2,000,000
Bahan	Bahan Penelitian (Habis Pakai)	Validasi Instrumen Berpikir Kritis	Paket	3	500,000	1,500,000
Pengumpulan Data	FGD persiapan penelitian	Pembuatan Instrumen Penelitian	Paket	1	4,000,000	4,000,000
Pengumpulan Data	HR Pembantu Peneliti	Dokumentasi	OJ	175	25,000	4,375,000
Pengumpulan Data	HR Sekretariat/Administrasi Peneliti	Arsip Penelitian	OB	5	300,000	1,500,000

Jenis Pembelanjaan	Komponen	Item	Satuan	Vol.	Biaya Satuan	Total
Pengumpulan Data	Transport	Validasi Instrumen Berpikir Kritis	OK (kali)	10	410,000	4,100,000
Pengumpulan Data	Transport	Koordinasi dengan TPM	OK (kali)	30	160,000	4,800,000
Pengumpulan Data	Tiket	Seminar Internasional	OK (kali)	6	2,000,000	12,000,000
Pengumpulan Data	Penginapan	Seminar Internasional	OH	6	1,500,000	9,000,000
Pengumpulan Data	Biaya konsumsi	Membuat Instrumen Berpikir Kritis	OH	25	500,000	12,500,000
Pengumpulan Data	HR Pembantu Lapangan	Observasi Penelitian	OH	300	80,000	24,000,000
Sewa Peralatan	Peralatan penelitian	Alat Perekam	Unit	25	1,000,000	25,000,000
Sewa Peralatan	Transport penelitian	Mobil	Unit	15	500,000	7,500,000
Analisis Data	HR Sekretariat/Administrasi Peneliti	Arsip Data Hasil Penelitian	OP	3	1,500,000	4,500,000
Analisis Data	HR Pengolah Data	Pengolah Data Hasil Penelitian	OP	5	1,540,000	7,700,000
Analisis Data	Honorarium narasumber	Pembuatan KI dan TTG	OJ	2	1,700,000	3,400,000
Analisis Data	Tiket	Analis Data penelitian	OK(kali)	3	1,500,000	4,500,000
Analisis Data	Transport Lokal	Analisis validasi TTG	ok (kali)	6	150,000	900,000
Analisis Data	Transport Lokal	Analisis validasi bahan ajar	ok (kali)	6	150,000	900,000
Analisis Data	Transport Lokal	Analisis validasi aplikasi	ok)kali)	6	150,000	900,000
Analisis Data	Penginapan	Membuat analisis data hasil penelitian	OH	3	1,000,000	3,000,000
Analisis Data	Biaya konsumsi rapat	Rapat Hasil Penelitian	OH	25	500,000	12,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Uang harian rapat di dalam kantor	Pengisian Loogbook	OH	5	300,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Uang harian rapat di dalam kantor	Pembuatan SPTJB	OH	3	300,000	900,000
Pelaporan, Luaran Wajib,	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan Laporan Akhir	OH	5	300,000	1,500,000

Jenis Pembelanjaan	Komponen	Item	Satuan	Vol.	Biaya Satuan	Total
dan Luaran Tambahan						
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan Laporan Akhir Keuangan	OH	5	300,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan Draft Artikel Seminar Internasional	OH	15	300,000	4,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya konsumsi rapat	Penyusunan SPTJB	OH	5	300,000	1,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya seminar internasional	Pendaftaran Seminar Internasional	Paket	3	3,000,000	9,000,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Biaya seminar internasional	Cetak Prosiding	Paket	5	1,500,000	7,500,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Luaran KI (paten, hak cipta dll)	Penyusunan TTG yang telah divalidasi	Paket	1	3,000,000	3,000,000
Pelaporan, Luaran Wajib, dan Luaran Tambahan	Luaran KI (paten, hak cipta dll)	Pembayaran Pendaftaran HKI	Paket	1	1,000,000	1,000,000

6. HASIL PENELITIAN

A. RINGKASAN: Tuliskan secara ringkas latar belakang penelitian, tujuan dan tahapan metode penelitian, luaran yang ditargetkan, serta uraian TKT penelitian.

Pendidikan di Indonesia dihadapkan pada ragam persoalan internal dan ekternal yang ditimbulkan oleh berbagai macam perubahan, seperti perubahan teknologi, perubahan sosial dan perubahan budaya. Kemajuan teknologi dapat diamati pada mahasiswa Universitas Muhammadiyah Metro kebanyakan memiliki handphone andrioid dan laptop yang sering digunakan dalam pembelajaran, yaitu mencari sumber referensi melalui internet. Namun Dosen matematika khususnya pada mata kuliah Aljabar Linear belum memiliki e-modul yang dapat diakses oleh mahasiswa. Berdasarkan data angket yang telah dianalisis yaitu mahasiswa merasa senang apabila dosen memiliki e-modul dibandingkan bahan ajar cetak karena didalamnya adanya fasilitas multimedia seperti gambar, animasi, video dan audio. Dengan adanya e-modul, mahasiswa dapat mengerjakan soal secara interaktif karena mahasiswa mengevaluasi diri sendiri terhadap suatu kompetensi serta berfungsi sebagai multiplatform yaitu dapat digunakan pada berbagai peralatan seperti laptop dan handphone. Berdasarkan hasil wawancara, dan analisis tes berpikir kritis mahasiswa menunjukkan bahwa mahasiswa merasa kesulitan saat menyelesaikan permasalahan yang diberikan, seperti menginterpretasi masalah, analisis, evaluasi dan menarik kesimpulan. Mahasiswa masih sangat bergantung pada dosen saat menyelesaikan soal-soal yang ada. Salah satu e-modul yang dapat digunakan adalah modul berbasis Socrates. Didalam metode Socrates ini ada bagian pengajuan pertanyaan-pertanyaan yang merangsang mahasiswa untuk berpikir kritis. Proses pertanyaan yang meminta penjelasan untuk menuntun /mahasiswa memperoleh pengetahuan melalui langkah-langkah kecil. Metode ini belum pernah diterapkan di perguruan tinggi TPP namun sudah pernah diterapkan diperguruan tinggi TPM dan berhasil dalam meningkatkan keterampilan berpikir kritis dan hasil belajar mahasiswa. Untuk itu, TPP bekerjasama dengan TPM untuk meningkatkan kualitas bahan ajar serta proses pembelajaran pada mata kuliah Aljabar Linear.

Tahapan-tahapan penelitian yang akan dilakukan: (1) Tahap Prelimanary research : Pada tahap ini meliputi analisis terhadap kondisi bahan ajar yang digunakan, menganalisis kebutuhan bahan ajar, analisis karakteristik mahasiswa dan analisis pelaksanaan pembelajaran aljabar linear(2) Tahap Prototyping : Pada tahap ini meliputi perancangan prototipe e-modul berbasis Socrates berbantu android. Sehingga menghasilkan Prototipe 1,dimana e-modul dilakukan penilaian oleh para ahli materi, desain dan pembelajaran. (3) Tahap Assesment : berupa Prototipe 2 yang sudah direvisi berdasarkan penilaian ahli dilakukan uji coba kecil kepada sampel yaitu mahasiswa yang menempuh mata kuliah Aljabar linear semester genap tahun 2020/2021 di Universitas Muhammadiyah Metro dan Universitas Lampung. Hasil uji coba digunakan untuk revisi sehingga diperoleh Prototipe 3 yang akan digunakan dalam uji lapangan dilakukan di Mahasiswa perguruan tinggi di Propinsi Jakarta dan di Jawa Timur (4) Tahap Implementation: Pada tahap ini dilakukan implementasi pembelajaran menggunakan “E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates Berbantu Aplikasi Android.

Hasil penelitian yang diperoleh pada tahun ke-1 ini adalah: (1) Berdasarkan hasil validasi materi dan media diperoleh bahwa produk Aplikasi E-Modul Aljabar Linear sangat layak digunakan yaitu sebesar 84,66%. Setelah dilakukan uji coba terbatas diperoleh bahwa produk sangat praktis yaitu sebesar 90,16% dan dapat dilanjutkan ke tahap implentasi atau uji lapangan. Pelaksanaan desiminasi uji coba produk dilaksanakan di luar dan di lingkungan kampus diperoleh beberapa saran untuk aplikasi e-modul selanjutnya yaitu: (1) Pada aplikasi e-modul sebaiknya isi pertanyaan dapat bersifat dinamis sehingga dapat meningkatkan berpikir kritis mahasiswa, (2) Terdapat buku petunjuk penggunaan aplikasi sehingga memudahkan bagi dosen dan mahasiswa yang baru menggunakan aplikasi tersebut.

Setelah pelaksanaan ujicoba, dilaksanakan sosialisasi yang melibatkan peneliti, dosen serta mahasiswa terkait produk aplikasi e-modul yang sudah diperbaiki hingga tahap prototipe 2. Dari hasil sosialisasi tersebut didapatkan komentar dari mahasiswa diantaranya: (1) Aplikasi sangat menarik dari sisi desain maupun isinya sehingga memudahkan mahasiswa dalam belajar secara mandiri mapun dengan bimbingan dosen. (2) Didalam aplikasi terdapat tanya jawab yang dapat meningkatkan aktivitas serta berpikir kritis mahasiswa. (3) Aplikasi bisa dikembangkan untuk mata kuliah yang lain.

Luaran dari penelitian dan pengembangan ini berupa luaran wajib: Buku Ajar ber-ISBN E-Modul Aljabar Linear Berbasis Metode Socrates (sudah ber-ISBN) dan Luaran tambahan: (1) Publikasi di Jurnal Internasional (Tahap riview) (2) Buku Ajar (ISBN) Buku Aljabar Linear untuk Meningkatkan Berpikir kritis (sudah ber-ISBN) dan (3) Publikasi Artikel di Jurnal Nasional Terakreditasi Sinta 2 (Sudah Publish). TKT dalam penelitian ini merupakan TKT tingkat 4 yaitu produk sudah melalui tahap validasi serta ujicoba terbatas sehingga dapat dilanjutkan kedalam tahap implementasi yaitu digunakan dalam pembelajaran mata kuliah Aljabar Linear.

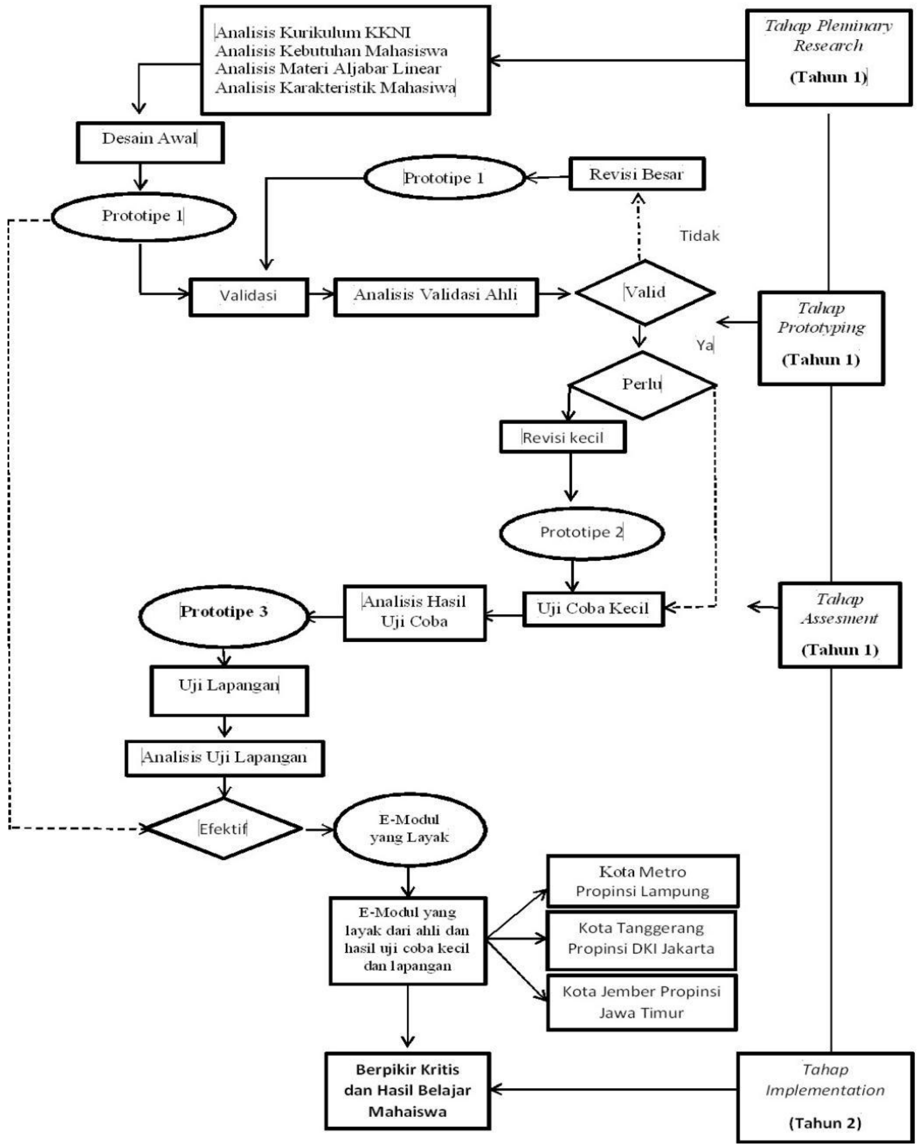
B. KATA KUNCI: Tuliskan maksimal 5 kata kunci.

Aplikasi; Berpikir Kritis; E-Modul; Pengembangan; Socrates

Pengisian poin C sampai dengan poin H mengikuti template berikut dan tidak dibatasi jumlah kata atau halaman namun disarankan seringkas mungkin. Dilarang menghapus/memodifikasi template ataupun menghapus penjelasan di setiap poin.

C. HASIL PELAKSANAAN PENELITIAN: Tuliskan secara ringkas hasil pelaksanaan penelitian yang telah dicapai sesuai tahun pelaksanaan penelitian. Penyajian dapat berupa data, hasil analisis, dan capaian luaran (wajib dan atau tambahan). Seluruh hasil atau capaian yang dilaporkan harus berkaitan dengan tahapan pelaksanaan penelitian sebagaimana direncanakan pada proposal. Penyajian data dapat berupa gambar, tabel, grafik, dan sejenisnya, serta analisis didukung dengan sumber pustaka primer yang relevan dan terkini.

Jenis penelitian yang digunakan oleh peneliti adalah penelitian dan pengembangan (R&D) yang bertujuan untuk mengembangkan e-modul berbasis socrates berbantu aplikasi *android* bagi mahasiswa. Subyek penelitian ini adalah mahasiswa semester 4 di Universitas Muhammadiyah Metro. Model pengembangan yang digunakan sebagai dasar dalam penelitian ini adalah model dari Plomp yang terdiri dari 3 (tiga) tahap yaitu:



Gambar 2. Tahapan dalam Penelitian Adaptasi Plomp

Berikut ini penjelasan pada tahapan-tahapan penelitian akan dilaksanakan:

1. Preliminary Research

Tahap *preliminary research*, dilakukan sebagai penentuan masalah dasar yang diperlukan untuk mengembangkan e-modul berbasis Socrates. Analisis kebutuhan ini dilaksanakan pada bulan Agustus-November 2020 yaitu melakukan analisis terhadap kondisi sumber belajar yang ada, menganalisis kebutuhan media pembelajaran mahasiswa, analisis karakter mahasiswa, dan analisis keterlaksanaan pembelajaran mata kuliah Aljabar Linear di Program studi Pendidikan Matematika tahun 2020/2021. Pelaksanaan perkuliahan oleh 2 (dua) dosen mata kuliah aljabar linear dan 34 (tiga puluh empat) mahasiswa.

Objek kajian dalam penelitian ini mencakup: 1) kesesuaian bahan ajar dengan materi, 2) bahan ajar yang digunakan oleh dosen, 3) kebutuhan dosen dan mahasiswa terkait bahan ajar berbasis teknologi informasi, dan 4) Keterlaksanaan pembelajaran aljabar linear. Data penelitian dikumpulkan dengan teknik observasi, wawancara, dan penyebaran angket dan tes. Instrumen wawancara terhadap dosen digunakan untuk memperoleh informasi bahan ajar yang digunakan dalam pembelajaran matematika dan pelaksanaan pembelajaran alajabar linear. Sedangkan instrumen angket kepada mahasiswa digunakan untuk mengetahui pandangan tentang kebutuhan bahan ajar dalam pembelajaran aljabar linear, pelaksanaan pembelajaran aljabar linear. Sedangkan tes digunakan untuk mengetahui kemampuan berpikir kritis mahasiswa. Dalam penelitian ini menggunakan teknik analisis data yaitu analisis derkriptif kualitatif. Dari hasil teknik analisis data kebutuhan mahasiswa diperoleh bahwa:

a. Dosen matematika khususnya pada mata kuliah Aljabar Linear belum memiliki media pembelajaran elektronikl dalam bentuk aplikasi yang dapat diakses oleh mahasiswa dalam memfasilitasi pembelajaran daring saat ini.
b. Mahasiswa belum dapat berpikir secara kritis dalam memikirkan langkah-langkah sederhana terlebih dahulu dalam menyelesaikan permasalahan serta belum bisa membiasakan untuk memperoleh pengetahuan tanpa diberitahu terlebih dahulu oleh dosen. Menurut (Yunarti, 2016) Metode Socrates adalah sebuah proses pertanyaan yang meminta penjelasan untuk menuntun seseorang memperoleh pengetahuan melalui langkah-langkah kecil. Dengan menerapkan metode socrates dalam pembelajaran, mahasiswa dapat berpikir kritis serta dapat memikirkan langkah-langkah sederhana terlebih dahulu dalam menyelesaikan permasalahan, serta dapat membiasakan mahasiswa untuk memperoleh pengetahuan tanpa diberitahu terlebih dahulu oleh dosen.
c. Mahasiswa sudah memiliki *handphone andrioid* dan laptop yang digunakan dalam pembelajaran, yaitu mencari sumber referensi melalui internet.
d. Menurut hasil observasi (Vahlia,dkk, 2021) menunjukkan bahwa bahan ajar yang digunakan dalam pembelajaran matakuliah aljabar linear pada saat ini masih sangat terbatas jenisnya yaitu berupa sebuah buku teks dan mahasiswa masih kesulitan dalam memahami materi dalam bahan ajar tersebut serta mahasiswa mengharapkan adanya aplikasi yang dapat memudahkan mahasiswa dalam mempelajari materi aljabar dan bisa interaktif dalam menjawab pertanyaan.

2. *Prototyping Phase*

Pembuatan *prototype* ini dilaksanakan pada tahun 1 yang dilakukan sebagai penentuan desain e-modul, instrumen penelitian meliputi instrumen validitas e-modul, instrumen kepraktisan berupa lembar pengamatan serta angket respon mahasiswa dan dosen. Selanjutnya e-modul serta instrumen pendukung tersebut direalisasikan menjadi sebuah produk, sehingga diperoleh Prototipe 1 (e-modul berbasis Socrates) yang telah divalidasi oleh 3 validator materi serta 3 validator media pembelajaran IT. Setelah dilakukan validasi produk diperoleh data sebagai berikut:

a. Validasi Materi E- Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates

Produk yang telah dirancang dan dievaluasi selanjutnya dilakukan validasi oleh 3 ahli materi menggunakan instrumen yang telah disediakan. Ahli materi yang dipilih merupakan dosen matematika yang telah memberikan terkait penilaian materi yang dibuat oleh peneliti. Ahli materi ini juga memberikan berbagai komentar dan saran sebagai bahan perbaikan E-Modul aplikasi yang telah dibuat oleh peneliti.

Berikut disajikan data hasil penilaian dari 3 ahli materi pada Tabel 3 sebagai berikut:

Tabel 1 Data Hasil Validasi Produk Oleh Ahli Materi

Validator	Jumlah Skor	Persentase	Kategori
V_1	60	80,00%	Valid
V_2	62	82,67%	Sangat Valid
V_2	61	81,33%	Sangat Valid
Rata-rata		81,33%	Sangat Valid

Keterangan:
V_1 : Validator 1 adalah Dr. Hj. Sutrisni A., M.Pd
V_2 : Validator 2 adalah Dr. Christina M. Laamena, M.Sc
V_3 : Validator 2 adalah Dr. Syukma Netty, M. Sc.

Berdasarkan data hasil validasi materi pada Tabel 1, menunjukkan bahwa hasil penilaian validasi materi untuk produk berupa E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates mendapat penilaian dari validator 1 berjumlah 60 skor dengan total persentase kevalidan 80,00% dalam kategori valid. Penilaian dari validator 2 mendapat jumlah 62 skor dengan total persentase kevalidan 82,67% dalam kategori sangat valid, sedangkan Penilaian dari validator 3 mendapat jumlah 61 skor dengan total persentase kevalidan 81,33% dalam kategori sangat valid dengan demikian jumlah skor dari ketiga validator yaitu 183 dengan persentase kevalidan 81,33 % dalam kategori sangat valid. Namun, masih terdapat beberapa revisi yang harus dilakukan dengan memperhatikan saran dan komentar dari para validator. Berikut adalah komentar dan saran dari kedua validator ahli materi yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Komentar dan Saran Ahli Materi

Validator (V)		Komentar dan Saran
V_1	1.	Latihan sudah baik, namun contoh soal perlu ditambahkan agar pembaca lebih memahami untuk mengerjakan latihan
	2.	Tampilan materi sudah baik, namun perlu tampilan atau *setting* tambahan agar pembaca lebih menarik lagi
V_2	1.	Semua definisi dan teorema sebaiknya menggunakan penomoran sebagai nama dan latihan.
	2.	Apakah dengan pertanyaan tanpa contoh apapun, mahasiswa bapak atau ibu sanggup menyelesaikannya?
	3.	Saran saya, diberikan bantuan-bantuan terbatas berupa pertanyaan yang menolong siswa menyelesaikan beberapa soal pertama
	4.	Sebaiknya ada penjelasan2 tentang makna setiap definisi dan rumus
	5.	Semua definisi pada modul sebaiknya diberi nomor agar memudahkan mahasiswa merujuk, definisi mana yang digunakan dalam pembuktian
V_3	1.	Pada halaman 11 di angket validasi ada dua item yang bertentangan dengan kalimat ini, bahwa modul bisa dipelajari sendiri oleh mahasiswa dan bahwa mahasiswa tidak perlu mencari buku lain bisa diperbaiki kembali
	2.	Pada bagian peta materi sebaiknya peta konsep saja, agar lebih bermakna
	3.	Secara umum modul ini sudah bagus, baik pengetikan dan penulisan *equation*. jika memungkinkan, sebaiknya bahasa dalam penyajian materi dibuat lebih komunikatif. Perbedaan mendasar antara buku dan modul selain latihan dan tugas-tugasnya juga, yang tidak kalah penting adalah bahasanya dengan penjelasan yang lebih detail dari buku

Keterangan:
V_1 : Validator 1 adalah Dr. Hj. Sutrisni A., M.Pd

V_2 : Validator 2 adalah Dr. Christina M. Laamena, M.Sc.

V_3 : Validator 2 adalah Dr. Syukma Netty, M. Sc.

Analisis hasil validasi ahli materi diperoleh data sebagai berikut:

1. Validator 1 yaitu Dr. Hj. Sutrisni Andayani, M. Pd. latihan pada modul sudah cukup lengkap namun perlu ditambahkan contoh- contoh soal agar mahasiswa dapat lebih memahami dalam pengerjaan latihan karena modul memang

dirancang untuk pembelajaran mandiri mahasiswa. Materi secara keseluruhan sudah cukup baik dan sesuai digunakan dalam pembelajaran mata kuliah aljabar linear. Namun dalam tampilan materi perlu ditambahkan agar lebih menarik dipelajari oleh mahasiswa.

2. Validator 2 yaitu Dr. Christina M. Laamena, M.Sc semua definisi sebaiknya menggunakan penomoran sebagai nama dan latihan. Didalam modul diberikan contoh mahasiswa mengerjakan soal tersebut sehingga mahasiswa dapat mempunyai gambaran tentang pembelajaran socrates karena tujuan adanya modul adalah supaya mahasiswa dapat belajar secara mandiri. Didalam modul juga harus dilengkapi dengan penjelasan-penjelasan tentang makna dari setiap definisi dan rumusnya.
3. Validator 3 yaitu Dr. Syukma Netty, M. Sc. diperbaiki bagian angket validasi ada dua item yang bertentangan dengan kalimat ini, bahwa modul bisa dipelajari sendiri oleh mahasiswa dan bahwa mahasiswa tidak perlu mencari buku lain bisa diperbaiki kembali. Pada bagian peta materi sebaiknya peta konsep saja, agar lebih bermakna. Secara umum modul ini sudah bagus, baik pengetikan dan penulisan *equation*. jika memungkinkan, sebaiknya bahasa dalam penyajian materi dibuat lebih komunikatif. Perbedaan mendasar antara buku dan modul selain latihan dan tugas-tugasnya juga, yang tidak kalah penting adalah bahasanya dengan penjelasan yang lebih detail dari buku. Sebaiknya antara buku aljabar linear dan modulnya menggunakan istilah yang sama, karena satu tim penulis dibuku menggunakan istilah membangun, disini merentang. Bahasa yang digunakan sudah komunikatif, namun perlu ditambahkan beberapa penjelasan tentang materi sehingga mahasiswa bisa belajar dengan sumber ini tanpa harus mencari sumber lain. Pada poin 12 didalam modul dinyatakan adanya gambar yang membantu dalam meningkatkan literasi mahasiswa, perlu ditambahkan gambar dari konsep-konsep yang dibahas karena belum ada didalamnya. penyesuaian dengan metode Socrates untuk meningkatkan keterampilan berpikir kritis sehingga mahasiswa memperoleh pengetahuan tentang materi aljabar linear secara maksimal.

C. Validasi Ahli Desain E-Modul Aplikasi

Validasi ahli media bertujuan untuk menilai mengenai desain aplikasi e-modul Aljabar Linear sebelum diujicobakan kepada mahasiswa serta bagaimana tampilan e-modul apakah sudah sesuai atau belum. Validasi dilakukan oleh tiga ahli media dengan memberikan aplikasi e-modul yang dapat langsung didownload oleh validator dan lembar validasi media yang berisikan 10 pertanyaan. Validator ahli desain merupakan dosen pengampu mata kuliah komputer terkait berbagai penyajian dari aplikasi yang telah dibuat serta masukan untuk perbaikan produk aplikasi. Berikut hasil validasi media disajikan secara lengkap pada Tabel 3 berikut ini:

Tabel 3 Hasil Validasi Ahli Media

No	Validator	Total Skor Keseluruhan	Presentase Kevalidan	Kategori Kevalidan
1.	V_4	48	96 %	Sangat Valid
2.	V_5	45	90 %	Sangat Valid
3.	V_6	39	78 %	Sangat Valid
	Jumlah		**88%**	**Sangat Valid**

Keterangan:
V_4 : Validator 1 adalah Arif Hidayat,S.T., M.Kom.

V_5 : Validator 2 adalah Rizky Prabowo, M. Kom.

V_6 : Validator 2 adalah Dr. Haryanto, M.Sc.

Berdasarkan Tabel 5 di atas menunjukkan bahwa penilaian yang diberikan oleh validator 1 dengan total skor keseluruhan 48 dan presentase kevalidan 96 % termasuk kategori sangat valid. Penilaian yang diberikan validator 2 dengan total skor keseluruhan 45 dan presentase kevalidan 90 % termasuk kategori sangat valid. Penilaian yang diberikan validator 3 dengan total skor keseluruhan 39 dan presentase kevalidan 78% termasuk kategor valid. Walaupun dalam penilaian diperoleh kategori sangat valid, aplikasi e-modul aljabar linear masih memerlukan perbaikan pada beberapa bagian sesuai saran dan komentar yang diberikan oleh para validator. Berikut ini saran dan komentar yang diberikan oleh kedua validator materi yang disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4 Saran dan Komentar Ahli Media

Validator	Saran dan Komentar
V_4	1. Aplikasi sangat menarik dan bermanfaat 2. Paragraf bisa lebih dirapikan lagi, namun secara keseluruhan sudah sesuai 3. *Font* pada gambar disesuaikan (diperkecil) 4. Fungsionalitas aplikasi sudah sesuai 5. Warna sangat cerah dan menarik
V_5	1. Terdapat bagian depan *(cover)* tulisan tim pengembang sebaiknya diganti dengan warna cerah (putih) supaya lebih terlihat Button (tombol) start sebaiknya gunakan icon bertipe (png) dengan *baground* transparan. Silahkan gunakan icon/simbol *play* pada tombol *start* bukan *icon/simbol Arrow.* 2. Terdapat 6 kotak materi pada pengantar, hal tersebut memancing user untuk memilih salah satu, realitanya ke-6 kotak materi tidak mengarah/memiliki link. Hal ini terjadi pada saat pertama kali user menggunakan aplikasi tersebut. Sebaiknya menggunakan *list menu* saja, jangan kotak materi 3. Aplikasi tidak terdapat opsi *mute* suara. Desain *single sound icon* seharusnya berfungsi untuk *sound on* dan *sound off (mute)* Tombol *next, previous* dan *exit*, silahkan gunakan *bacground transparan* 4. Menu evaluasi, berikan opsi reset kuis untuk mencoba kembali kuis yang diberikan. Pada bagian akhir kuis, perbaiki identitas kata "*passing score*" berikut identitas dari nilainya. 5. Sebaiknya *layout* aplikasi dibuat vertikal dengan memastikan fungsi *auto rotate*. Saat aplikasi mengikuti *auto rotate horizontal* desain tampilan akan menjadi lebih kecil dan susah dibaca.
V_6	1. Harap di perhatikan penggunaan modul ini ke dalam aplikasi yang sesuai dan di uji cobakan ke dalam berbagai OS yang biasa digunakan mahasiswa misalkan penggunaan kedalam android berbagai versi. 2. Sebaiknya untuk kalimat yang panjang dapat disajikan dalam bentuk gambar. Sehingga untuk OS versi beda dan perangkat berbeda tidak acak. 3. Tampilan devinisi dimunculkan *step by step*. Sesuai dengan Apa yang sedang dijelaskan. 4. Mengenai isi pada quis. Sebaiknya pilihan ganda dengan opsi 4 atau lebih.

Analisis hasil validasi ahli materi buku berpikir kritis diperoleh data sebagai berikut:

1. Aspek ini mencakup butir indikator (a) Organisasi, (b) Daya Tarik (c) Bentuk dan Ukuran Huruf (d) Ruang atau Spasi Kosong (e) Konsistensi. Jumlah skor yang didapat dari ketiga validator yaitu 132 dengan presentase 88% dikategorikan sangat layak.
2. Komentar dan saran validator pertama Bapak Arif Hidayat, S.T., Kom. desain aplikasi aljabar liner yaitu aplikasi cukup menarik dan bermanfaat digunakan untuk mahasiswa dalam membantu pembelajaran aljabar linear. Selain itu, fungsionalitas dari aplikasi sudah sesuai dapat berfungsi dengan baik. Warna yang terdapat pada aplikasi sangat cerah dan menarik apabila dilihat oleh mahasiswa. Namun beberapa paragraf sebaiknya diperbaiki atau dirapikan kembali.
3. Validator kedua yaitu Bapak Rizky Prabowo, M. Kom untuk bagian *cover* tulisan tim pengembang diganti berwarna putih supaya tombol *start* dapat terlihat dengan jelas. Icon yang digunakan juga sebaiknya bertipe *png* dengan warna *baground* transparan. Pada bagian selanjutnya, terdapat kotak materi berjumlah 6 kotak namun tidak mengarah pada *link*. Pengguna akan mencoba mengklik kotak tersebut, jadi sebaiknya menggunakan *list* menu saja jangan kotak materi. Opsi *mute* suara belum ada, jadi *desain single sound icon* seharusnya berfungsi untuk *sound on* dan *sound off (mute)*. Bagian pada tombol *next, previous* dan *exit*, dapat menggunakan *bacground* transparan. Bagian menu evaluasi dapat diberikan opsi reset kuis untuk mencoba kembali kuis yang diberikan. Pada bagian akhir kuis dapat

memperbaiki identitas kata "*passing score*" berikut identitas dari nilainya. Bagian layout aplikasi dibuat vertikal dengan memastikan fungsi *auto rotate*. Saat aplikasi mengikuti *auto rotate* horizontal desain tampilan akan menjadi lebih kecil dan susah dibaca.

4. Menurut validator ketiga Bapak Dr. Haryanto, M. Sc. juga perlu diperhatikan tentang penggunaan modul ini kedalam aplikasi yang sesuai. Peneliti mengujicobakan ke dalam berbagai OS yang biasa digunakan oleh mahasiswa secara umum. Aplikasi ini memang bisa dipakai untuk hp android namun tidak dapat digunakan di *I-Phone*. Didalam aplikasi banyak kalimat yang panjang seharusnya bisa disajikan dalam bentuk gambar sehingga memudahkan mahasiswa dalam memahami materi serta tidak terlalu banyak tulisan. Kuis juga dapat ditambahkan dengan pilihan jawaban sehingga mahasiswa bisa interaktif dalam menyelesaikan permasalahan dalam aljabar linear. Lebih bagus lagi bila terdapat contoh menjawab soal dari materi.

Berdasarkan hasil validasi materi dan desain dari para ahli diperoleh rekapitulasi keseluruhan hasil validasi dapat dilihat pada Tabel 5 berikut ini:

Tabel 5. Rekapitulasi Hasil Validasi E-Modul Aplikasi Aljabar Linear

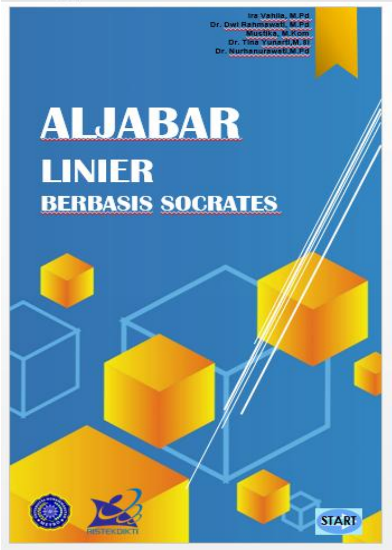
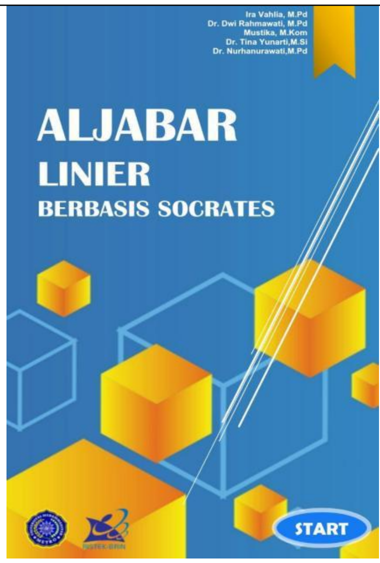
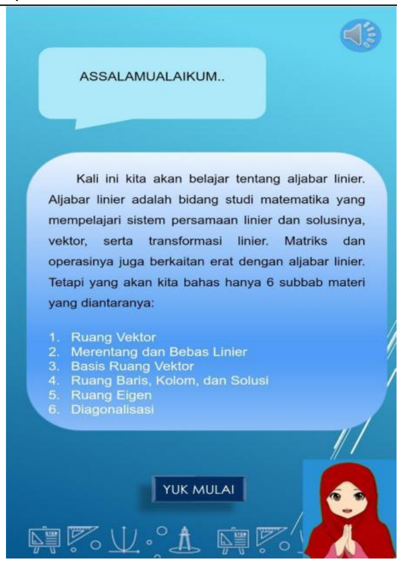
No	Nama Validator	Ahli	Nilai	Kategori
1.	Dr. Sutrisni Andayani., M.Pd	Materi (Matematika)	80,00%	Valid
2.	Dr. Christina M. Laamena, M.Sc.	Materi (Matematika)	82,67%	Sangat Valid
3.	Dr. Syukma Netty, M. Sc.	Materi (Matematika)	81,33%	Sangat Valid
Rata-Rata			**81,33%**	**Sangat Valid**
4.	Arif Hidayat,S.T., M.Kom.	Desain (Aplikasi E-Modul)	96,00 %	Sangat Valid
5.	Rizky Prabowo, M. Kom.	Desain (Aplikasi E-Modul)	90,00 %	Sangat Valid
6.	Dr. Haryanto, M.Sc.	Desain (Aplikasi E-Modul)	78,00 %	Valid
Rata-Rata			**88,00 %**	**Sangat Valid**
RATA-RATA			**84,66 %**	**Sangat Valid**

Dari Tabel 5 diperoleh rata-rata validasi materi Aljabar Linear untuk Aplikasi E-Modul Aljabar Linear yaitu sebesar 81,33% dengan kategori sangat valid. Rata-rata validasi desain aplikasi E-Modul Aljabar Linear yaitu sebesar 88% dengan kategori sangat valid. Dari validator ahli materi dan desain diperoleh rata-rata yaitu sebesar 84,66% dengan kategori sangat valid. Walaupun kategori yang didapatkan sangat valid tetapi peneliti tetap memperbaiki hasil komentar dan saran dari validator sehingga dapat dilakukan tahap pengembangan selanjutnya yaitu uji coba terbatas pada mahasiswa matematika sehingga dapat digunakan dalam pembelajaran.

Revisi Produk

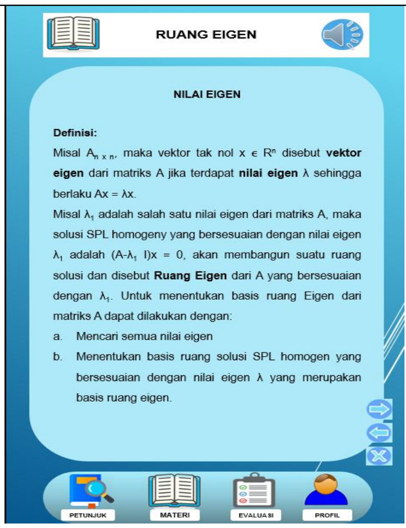
Revisi produk yang telah dikembangkan didasarkan atas saran dan komentar dari para validator ahli. Revisi dilakukan dengan merevisi produk setelah melakukan uji validasi dengan para ahli untuk menghasilkan produk yang valid. Hasil revisi produk disajikan pada Tabel 6 berikut ini:

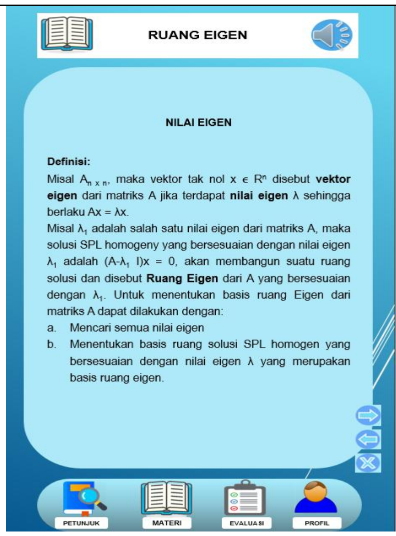
Tabel 6 Sampel Data Hasil Revisi Aplikasi E-Modul Aljabar Linear

No	Sebelum	Sesudah
1.	 Pada *cover* terdapat warna teks yang berwarna hitam sehingga tidak terlihat jelas serta tombol start juga kombinasi warnanya belum terlihat	 Pada cover warna teks diubah menjadi berwarna putih sehingga terlihat jelas serta tombol start kombinasi warnanya diperbaiki
2	 ● Kotak materi pada awal aplikasi memungkinkan pengguna untuk mengklik kotak tersebut, namun hanya berupa list materi. ● Spasi pada paragraf masih terlalu pendek serta jarak antar kata tidak teratur ● Belum adanya animasi didalam aplikasi supaya lebih menarik buat mahasiswa	 ● Kotak materi pada awal aplikasi dihilangkan diubah menjadi list materi sehingga tidak dklik oleh pengguna ● Spasi pada paragraf diubah dari 1 spasi menjadi double sehingga terlihat lebih rapi ● Didalam aplikasi dimasukkan animasi sehingga terlihat lebih menarik. Dibeberapa bagian juga terdapat animasi.

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>

Layout lebih dirapikan lagi antara menu dan sub menu</td>
<td>

Layout sudah diubah panahnya dan tidak lagi membingungkan pengguna</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>

Penulisan pada materi memiliki spasi 1 yang terlalu rapat</td>
<td>

Penggunaan spasi diubah menjadi 1,5</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>

Belum terdapat keterangan simbol matematika</td>
<td>

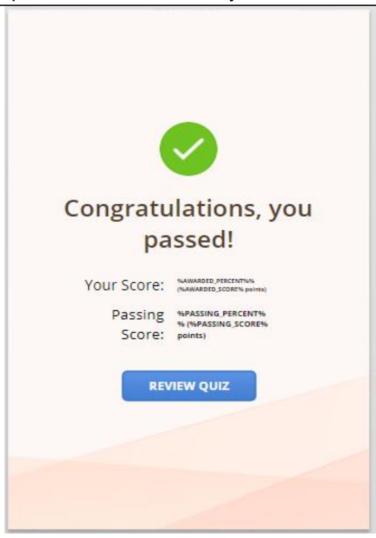
Sudah terdapat keterangan simbol matematika</td>
</tr>
</table>

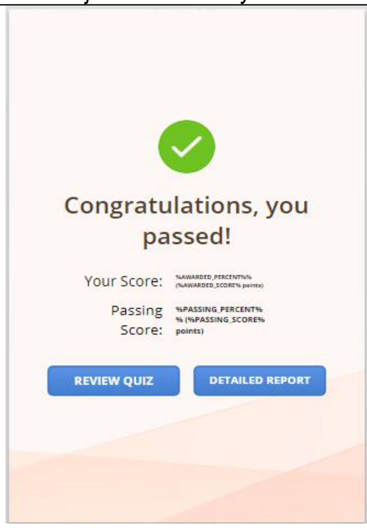
<table>
<tr>
<td>6</td>
<td>

Setelah materi, belum terdapat contoh soal. Jadi langsung ke pertanyaan</td>
<td>

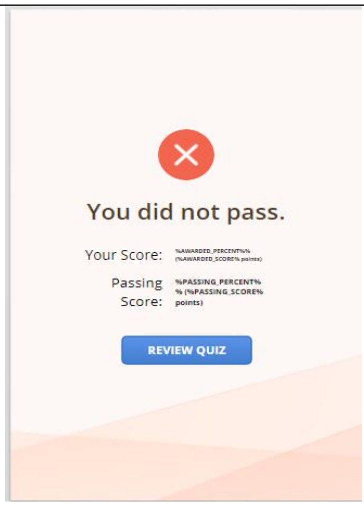
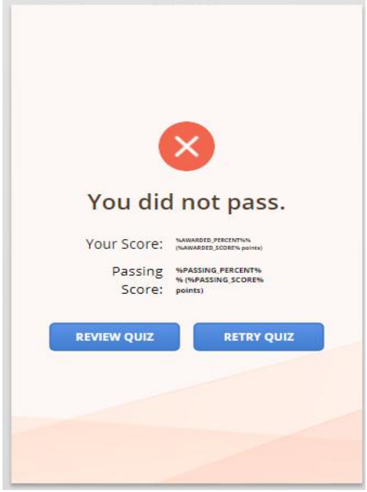
Ditambahkan contoh soal dalam aplikasi sehingga mahasiswa dapat mempelajari contoh soal terlebih dahulu</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>

Belum terdapat tempat upload jawaban pada aplikasi untuk soal essay</td>
<td>

Terdapat tempat upload jawaban pada aplikasi untuk menjawab soal essay</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>

Belum ada menu detail report agar penjelasan penilaian bisa lebih mendetail</td>
<td>

Perbaikan menu quis, ketika lulus passing score terdapat menu detail report</td>
</tr>
</table>

9	 Ketika tidak lulus *passing score* belum terdapat menu *retry quis* agar dapat mengulang pengerjaan kuis.	 Perbaikan menu quis, ketika tidak lulus passing score terdapat menu retry quis agar dapat mengulang pengerjaan kuis.

3. ***Assessment Phase***

Tahap *Assessment* dilakukan pada tahun 1 sebagai penentuan kualitas dari produk yang dihasilkan. Pada tahap ini dilakukan kegiatan utama yakni uji coba terbatas untuk mengetahui kepraktisan aplikasi e-modul yang dikembangkan di lapangan dalam skala kecil. Sampel dari uji coba ini adalah mahasiswa di Universitas Muhammadiyah Metro dan mahasiswa Universitas Lampung di Propinsi Lampung. Berdasarkan hasil validasi prototipe 1, dilakukan analisis dari tahap sebelumnya yaitu tahap *prototyping phase* sehingga menghasilkan prototipe 2 yaitu aplikasi e-modul yang siap digunakan dalam uji coba terbatas.

Pelaksanaan uji coba mengalami sedikit kendala karena di wilayah Metro dan Bandar Lampung merupakan daerah *red zone* serta diberlakukan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM) yang terus diperpanjang sampai dengan akhir bulan Agustus 2021. Oleh karena itu, ujicoba dilaksanakan secara daring yang menyesuaikan dengan kebijakan pemerintah.

Uji coba dilakukan melalui uji coba terbatas (kelompok kecil) dengan jumlah subjek 10 orang, sebagaimana disebutkan oleh (Restiyowati & Sanjaya, 2012) jumlah yang ideal untuk uji coba terbatas adalah 10 sampai 20 siswa. Ujicoba pada mahasiswa pendidikan matematika semester 4 di Universitas Lampung dan di Universitas Muhammadiyah Metro di lakukan secara daring dengan masing-masing 10 orang mahasiswa pendidikan matematika. Hal ini dikarenakan mahasiswa belum diperbolehkan melakukan pembelajaran secara luring.

Pelaksanaan uji coba pada Universitas Lampung dilaksanakan selama 2 hari. Kegiatan dibantu oleh tenaga pembantu lapangan serta observer pada kegiatan ujicoba sebanyak 2 orang dosen yaitu Bapak Nurain Suryadinata, M. Pd. dan Ibu Dra. Rini Asnawati, M. Pd sebagai dosen pengampu mata kuliah Aljabar Linear di Universitas Lampung. Pada hari ke 1 dilaksanakan pada tanggal 1 September 2021 secara *zoom meeting*. Pada pelaksanaan ujicoba, mahasiswa diberikan aplikasi E-Modul Aljabar Linear dan angket yang harus diisi dengan bantuan dosen. Ibu Dr. Tina Yunarti, M. Pd. menjelaskan tentang penggunaan E-Modul Aplikasi Aljabar Linear dan tujuan dalam pembuatan aplikasi E-Modul Aljabar Linear. Kemudian dilanjutkan Ibu Dr. Nurhanurawati, M. Pd. dalam menjelaskan petunjuk pengisian angket respon mahasiswa terkait Aplikasi Aljabar Linear, selanjutnya Bapak Nurain Suryadinata, M. Pd. dan Rizky Prabowo, M. Kom. melakukan observasi selama pelaksanaan ujicoba berlangsung.

Pada hari ke 2 tanggal 2 September 2021 yaitu kegiatan interaksi antara mahasiswa dan dosen untuk mengetahui bagaimana respon mahasiswa terkait penggunaan aplikasi Aljabar Linear dipandu oleh Ibu Dr. Tina Yunarti, M. Pd. dan Ibu Dr. Nurhanurawati, M. Pd.yaitu melakukan tanya jawab pada mahasiswa terkait Penggunaan Aplikasi apabila terdapat kesulitan dalam penggunaan ataupun mendownloadnya. Pengecekan hasil angket respon mahasiswa yang sudah diisi, apabila terdapat kekurangan bisa ditambahkan. Selanjutnya Bapak Nurain Suryadinata, M. Pd. dan Bapak Rizky Prabowo, M. Kom. melakukan observasi selama pelaksanaan ujicoba berlangsung. Pada saat kegiatan ujicoba terdapat mahasiswa yang bertanya dan memberikan masukan terkait penggunaan aplikasi aljabar seperti bagaimana cara menggunakan aplikasi, kemudian peneliti mengarahkan agar dapat membaca terlebih dahulu petunjuk penggunaan aplikasi yang telah dibuat untuk memudahkan penggunaan aplikasi. Selain itu, mahasiswa juga memberikan masukan terkait pengaturan suara karena ada mahasiswa yang tidak menyukai adanya suara pada saat mempelajari materi aljabar linear menggunakan aplikasi. Semua kita sesuaikan dengan saran dan komentar dari mahasiswa sehingga mahasiswa sangat tertarik mempelajari materi aljabar linear menggunakan aplikasi e-modul aljabar linear. Dari hasil ujicoba ditunjukkan pada Tabel 7 sebagai berikut:

Tabel 7. Hasil Uji Kepraktisan Aplikasi E-Modul Aljabar Linear di Universitas Lampung

No	Subjek	Total Skor	Presentase (%)	Kategori
1.	S_1	73	97.33	Sangat Praktis
2.	S_2	61	81.33	Sangat Praktis
3.	S_3	74	98.67	Sangat Praktis
4.	S_4	69	92.00	Sangat Praktis
5.	S_5	74	98,67	Sangat Praktis
6.	S_6	71	94.67	Sangat Praktis
7.	S_7	64	85.33	Sangat Praktis
8.	S_8	58	77.33	Praktis
9.	S_9	70	93.33	Sangat Praktis
10.	S_{10}	71	94.67	Sangat Praktis
	Rata-Rata		**91,33**	**Sangat Praktis**
1.	D_1	45	90.67	Sangat Praktis
2.	D_2	45	96,00	Sangat Praktis
	Rata-Rata		**93,33**	**Sangat Praktis**

Berdasarkan Tabel 7 di atas didapat bahwa dari 10 subjek coba (mahasiswa) Universitas Lampung memberikan respon dengan presentase 91,33% kategori sangat praktis terhadap aplikasi e-modul aljabar linear yang dikembangkan. Kemudian dari angket respon dosen aljabar linear memberikan respon persentase sebesar 93,33%. Maka dari itu dapat diartikan bahwa aplikasi e-modul matematika yang dikembangkan disetujui oleh para subjek coba (mahasiswa) dan dosen Aljabar Linear untuk digunakan dalam kegiatan pembelajaran. Terdapat saran dan komentar yang diberikan oleh para responden pada angket respon yang diberikan, berikut ini saran dan komentar disajikan pada Tabel 8 di bawah ini:

Tabel 8 Saran dan Komentar Subjek Coba (Mahasiswa)

Subjek	Saran dan Komentar
S_1	Aplikasi ini sangat bagus dan dapat dikembangkan lagi
S_2	Produk ini sangat praktis dan mudah digunakan, bisa mempersingkat waktu belajar sehingga lebih efisien

S_3	Produk ini sangat menarik tidak membosankan, materi yang disajikan juga sudah sangat sesuai dengan capaian pembelajaran, *tools* yang digunakan sudah sangat ramah.
S_4	Aplikasi sangat mudah untuk digunakan namun pada fontnya saja yang bisa untuk disesuaikan secara otomatis dengan perangkat sehingga terlihat tidak berantakan. Belajar sangat enak digunakan daripada menggunakan video *meeting* untuk pembelajarannya.
S_5	Secara umum aplikasinya sudah bagus sekali kemudian dengan dengan adanya media belajar ini belajar jadi lebih mudah karena sudah dalam bentuk aplikasi di *handphone* yang bisa dibawa kemana-mana dan materi yang dikemas dengan baik, dan ditambah fitur dibacakan yang membantu untuk mahasiswa yang malas membaca
S_6	Produk ini mudah digunakan, simpel, jelas tata cara penggunannya, dan tidak terlalu memberatkan perangkat hp. *Font* dan warna yang digunakan sudah jelas dan mudah dibaca, materi yang diberikan juga sudah memenuhi capaian pembelajaran. Menu suara yang bisa didengar juga memudahkan mahasiswa untuk belajar.
S_7	Aplikasi ini sudah bagus, karena terdapat bahan diskusi yang memancing serta menimbulkan mahasiswa dapat berpikir kritis, selain itu terdapat diskusi yang mudah untuk dipahami
S_8	Aplikasi ini *size* ringan dan petunjuk aplikasi sudah sangat jelas
S_9	Produk sangat praktis dan efektif, dengan tampilan yang cukup menarik ditambah beberapa animasi. Materinya juga cukup sesuai dengan pemilihan bahasa yang mudah untuk dimengerti.
S_{10}	Proses instalasi mudah, petunjuk penggunaan jelas sehingga tidak menyulitkan pengguna pertama aplikasi tersebut, penggunaan audio dikarenakan tidak semua e-modul menyediakan audio seperti pada aplikasi ini dan terdapat evaluasi yang dapat mengukur ketercapaikan pembelajaran dari mahasiswa

Pelaksanaan uji coba pada Universitas Muhamammadiyah Metro dilaksanakan selama 2 hari. Kegiatan dibantu oleh tenaga pembantu lapangan serta observer pada kegiatan ujicoba sebanyak 2 orang dosen yaitu Bapak Satrio Wicaksono S, M. Pd. dan Ibu Dr. Sutrisni Andayani, M. Pd sebagai dosen pengampu mata kuliah Aljabar Linear di Universitas Muhammadiyah Metro. Pada hari ke 1 dilaksanakan pada tanggal 3 September 2021 secara *zoom meeting*. Pada pelaksanaan ujicoba, mahasiswa diberikan aplikasi E-Modul Aljabar Linear dan angket yang harus diisi dengan bantuan dosen Ibu Ira Vahlia, M. Pd. dan Ibu Dr. Dwi Rahmawati, M. Pd. yang menjelaskan tentang penggunaan E-Modul Aplikasi Aljabar Linear dan tujuan dalam pembuatan aplikasi E-Modul Aljabar Linear. Kemudian dilanjutkan Pak Satrio Wicaksono S., M. Pd. dalam menjelaskan petunjuk pengisian angket respon mahasiswa terkait Aplikasi Aljabar Linear, selanjutnya Ibu Dr. Sutrisni Andayani, M. Pd. melakukan observasi selama pelaksanaan uji coba berlangsung.

Pada hari ke 2 tanggal 4 September 2021 yaitu kegiatan interaksi antara mahasiswa dan dosen untuk mengetahui bagaimana respon mahasiswa terkait penggunaan aplikasi Aljabar Linear dipandu oleh Ibu Mustika, M. Kom. yaitu melakukan tanya jawab pada mahasiswa terkait penggunaan aplikasi apabila terdapat kesulitan dalam penggunaan ataupun mendownloadnya. Pengecekan hasil angket respon mahasiswa yang sudah diisi oleh Bapak Dr. Rahmad Bustanul A., M. Pd., apabila terdapat kekurangan bisa ditambahkan. Selanjutnya Ibu Dr. Sutrisni Andayani, M. Pd. melakukan observasi selama pelaksanaan ujicoba berlangsung. Pada saat kegiatan ujicoba banyak mahasiswa yang bertanya dan memberikan masukan terkait penggunaan aplikasi aljabar seperti desain aplikasi aljabar sudah cukup bagus, adanya tambahan contoh soal sebelum ayo berdiskusi. 2) tombol *mute* bisa diatur suaranya apabila tidak ingin ada suara, 3) *font* di materi dan soal ada sedikit yang besar dan ada yang kecil supaya diseragamkan 4) *Font* dan tombol *next, previous,* dan *exit* saja agar jaraknya tidak berdekatan supaya memudahkan mahasiswa dalam menekan tombolnya. Hal ini kami perbaiki sesuai dengan saran dan komentar mahasiswa. 5) Terdapat tempat upload jawaban soal Essay yang memudahkan mahasiswa dan dosen dalam mengumpulkans serta mengoreksi jawaban.

Dari hasil ujicoba ditunjukkan pada Tabel 9 sebagai berikut:

Tabel 9. Hasil Uji Kepraktisan Aplikasi E-Modul Aljabar Linear di UM Metro

No	Subjek	Total Skor	Presentase (%)	Kategori
1.	S_{11}	66	88.00	Sangat Praktis
2.	S_{12}	64	85.33	Sangat Praktis
3.	S_{13}	62	82.67	Sangat Praktis
4.	S_{14}	72	96,00	Sangat Praktis
5.	S_{15}	59	78.67	Praktis
6.	S_{16}	65	86.67	Sangat Praktis
7.	S_{17}	72	96.00	Sangat Praktis
8.	S_{18}	68	90.67	Sangat Praktis
9.	S_{19}	66	88.00	Sangat Praktis
10.	S_{20}	72	96.00	Sangat Praktis
	Rata-Rata		**89,00**	**Sangat Praktis**
1.	D_3	68	90,67	Sangat Praktis
2.	D_4	64	85,33	Sangat Praktis
	Rata-Rata		**88,00**	**Sangat Praktis**

Berdasarkan Tabel 9 di atas didapat bahwa dari 10 subjek coba (mahasiswa) UM Metro memberikan respon dengan memiliki presentase 89,00% kategori sangat praktis terhadap aplikasi e-modul aljabar linear yang dikembangkan. Dosen aljabar linear memberikan angket respon dosen dengan persentase sebesar 88,00% dengan kategori sangat praktis. Maka dari itu dapat diartikan bahwa aplikasi e-modul matematika yang dikembangkan disetujui oleh para subjek coba (mahasiswa) dan dosen untuk digunakan dalam kegiatan pembelajaran. Terdapat saran dan komentar yang diberikan oleh para responden pada angket respon yang diberikan, berikut ini saran dan komentar disajikan pada Tabel 10 di bawah ini:

Tabel 10 Saran dan Komentar Subjek Coba (Mahasiswa)

Subjek	Saran dan Komentar
S_{11}	Aplikasi ini sudah terdapat banyak kelebihan dan sudah baik untuk digunakan dalam pembelajaran
S_{12}	Materi sudah sangat jelas dan spesifik, sarannya ditambahkan contoh soal di setiap materi.
S_{13}	Memudahkan dalam mempelajari tentang aljabar linier karena semua materi sudah ada dalam satu aplikasi semoga untuk kedepannya bisa bertambah lagi tidak hanya tentang aljabar linier, dan juga bisa dibawa kemana-mana dan dapat digunakan kapanpun karena sudah ada di *handphone* masing-masing.
S_{14}	Aplikasi ini sudah sangat baik materi yang dijelaskan sudah mencakup semuanya. Apalagi dalam masa pandemi seperti ini kemudahan bagi dosen maupun mahasiswa. Semoga aplikasi ini tidak hanya untuk materi aljabar linier saja tetapi untuk materi materi lainnya. Semangat untuk para dosen dalam mengembangkan aplikasi ini
S_{15}	Untuk aplikasi aljabar sangat membantu mahasiswa maupun dosen untuk proses belajar dan mengajar dan cukup efektif digunakan disaat daring seperti ini.
S_{16}	Aplikasi mampu membuat saya sebagai mahasiswa lebih mudah untuk memahami materi dan bisa juga untuk bahan belajar di rumah masing masing
S_{17}	Aplikasi ini memiliki materi yang mudah sudah sesuai dengan sub-sub tema dan aplikasi ini mudah untuk digunakan.
S_{18}	Produk ini sangat bagus sekali untuk proses pembelajaran daring seperti ini dan bagus juga digunakan saat

	luring karena pembelajaran menggunakan teknologi
S_{19}	Produk ini sangat bagus untuk pembelajaran daring dan saat digunakan luring
S_{20}	Aplikasi sudah baik, menarik, mudah digunakan. Materi yang disajikan juga sudah sesuai dan mudah dipahami. Pertanyaan-pertanyaan yang ada juga bagus karena bisa dijadikan latihan mahasiswa.

Berdasarkan hasil uji coba terbatas dari Universitas Lampung dan Universitas Muhammadiyah Metro, maka diperoleh rekapitulasi nilai hasil angket secara keseluruhan. Data disajikan sebagai berikut:

Tabel. 11 Rekapitulasi Hasil Uji Coba Aplikasi E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis

No	Universitas	Uji	Subjek	Nilai dan Kategori	Subjek	Nilai dan Kategori
1	Lampung	Aplikasi Aljabar Linear	Mahasiswa	91,33% (Sangat Praktis)	Dosen	93,33% (Sangat Praktis)
2	Muhammadiyah Metro	Aplikasi Aljabar Linear	Mahasiswa	89,00% (Sangat Praktis)	Dosen	88,00 (Sangat Praktis)
Rata-Rata				90,16% (Sangat Praktis)		90,67% (Sangat Praktis)

Berdasarkan hasil uji coba yang telah dilaksanakan di Universitas Lampung dan Universitas Muhammadiyah Metro, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Produk Aplikasi E-Modul Aljabar Linear mendapatkan nilai rata-rata dari angket respon mahasiswa sebesar 90,16% pada kategori sangat praktis dan nilai rata-rata dosen sebesar 90,67% dengan kategori sangat praktis. Menurut (Pamungkas, P., Rizki, S. & Vahlia, I., 2020) Teknik analisis data pengembangan ini adalah analisis validasi ahli dan analisis kepraktisan produk. Apabila hasil yang diperoleh sudah mencapai kriteria lebih dari 60% maka modul sudah valid untuk digunakan dalam proses belajar. Sedangkan kepraktisan modul mempunyai batas yang sama yaitu lebih dari 60% atau praktis. Hal ini menunjukkan bahwa produk aplikasi E-modul Aljabar Linear dapat dilakukan ke tahap pengembangan selanjutnya yaitu ujicoba kelompok besar untuk menghasilkan prototipe 3.

2. Aplikasi E-Modul Aljabar Linear ini bisa digunakan oleh jenis Android apapun sehingga memudahkan dosen dan mahasiswa menggunakannya dalam pembelajaran dan dapat dilanjutkan pada tahapan pengembangan penelitian berikutnya yaitu implementasi pembelajaran menggunakan aplikasi e-modul. Seperti pada hasil penelitian perlu adanya pengembangan dari suatu fungsi ponsel pintar yang dapat digunakan sebagai e-modul yaitu membuat e-modul dengan basis *mobile learning* yang dikemas menjadi e-modul interaktif pagi mahasiswa (Sukir, Nurkhamid & Nurdiansyah, 2019).

Setelah proses validasi produk aplikasi e-modul, maka dilakukan penyerahan bahan ajar kepada para ahli untuk masing-masing ahli materi dan desain aplikasi yaitu bahan ajar yang sudah ber-ISBN. Selain penyerahan bahan ajar, dilaksanakan sosialisasi yang melibatkan peneliti, dosen serta mahasiswa terkait produk aplikasi e-modul yang sudah diperbaiki hingga tahap prototipe 2. Dari hasil sosialisasi tersebut didapatkan komentar dari diantaranya: (1) aplikasi sangat menarik dari sisi desain maupun isinya sehingga memudahkan mahasiswa dalam belajar secara mandiri mapun dengan bimbingan dosen. (2) Didalam aplikasi terdapat tanya jawab yang dapat meningkatkan aktivitas serta berpikir kritis mahasiswa. (3) aplikasi bisa dikembangkan untuk mata kuliah yang lain.

D. **STATUS LUARAN**: Tuliskan jenis, identitas dan status ketercapaian setiap luaran wajib dan luaran tambahan (jika ada) yang dijanjikan pada tahun pelaksanaan penelitian. Jenis luaran dapat berupa publikasi, perolehan kekayaan intelektual, hasil pengujian atau luaran lainnya yang telah dijanjikan pada proposal. Uraian status luaran harus didukung dengan bukti kemajuan ketercapaian luaran sesuai dengan luaran yang dijanjikan. Lengkapi isian jenis luaran yang dijanjikan serta mengunggah bukti dokumen ketercapaian luaran wajib dan luaran tambahan melalui Simlitabmas mengikuti format sebagaimana terlihat pada bagian isian luaran

Luaran dari penelitian dan pengembangan yaitu sebagai berikut:

Tahun 1 :

Luaran Wajib :

Buku Ajar (ISBN) :

Berjudul Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates **Terbit** (No ISBN: 978-623-6031-89-6) Penerbit Anggota IKAPI Laduny Alifatama

Link Perpusnas:

https://isbn.perpusnas.go.id/Account/SearchBuku?searchTxt=Aljabar+Linear+Berbasis+Socrates&searchCat=Judul

Luaran Tambahan:

a. Buku Ajar (ISBN): Berjudul Buku Aljabar Linear Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis **Terbit** (No ISBN:978-623-90328-8-3) Penerbit LPPM Universitas Muhammadiyah Metro

   Link Perpusnas: https://isbn.perpusnas.go.id/Account/SearchBuku?searchTxt=978-623-90328-8-3&searchCat=ISBN

b. Publikasi Artikel Jurnal Terakreditasi (Sinta 2) :

   Published Vol. 10 No. 2 pada Jurnal Pendidikan Matematika Aksioma Universitas Muhamamadiyah Metro dengan Link: https://ojs.fkip.ummetro.ac.id/index.php/matematika/article/view/3671/pdf

c. Jurnal Internasional :

   Review untuk Volume 16 Nomor 3 pada Jurnal IEJME (International Electronic Journal of Mathematics Education)
   Link: https://www.iejme.com

E**. PERAN MITRA:** Tuliskan realisasi kerjasama dan kontribusi Mitra baik *in-kind* maupun *in-cash* (jika ada). Bukti pendukung realisasi kerjasama dan realisasi kontribusi mitra dilaporkan sesuai dengan kondisi yang sebenarnya. Bukti dokumen realisasi kerjasama dengan Mitra diunggah melalui Simlitabmas mengikuti format sebagaimana terlihat pada bagian isian mitra

Mitra dalam penelitian ini yatu Universitas Lampung. Dalam pelaksanaan penelitian, realisasi kontribusi mitra adalah sebagai beikut: (1) Mitra sebagai tempat sumber referensi primer dalam mendapatkan langkah-langkah kegiatan pembelajaran berbasis Socrates yang dituangkan kedalam modul kemudian dibuat menjadi Aplikasi E-Modul Aljabar Linear yang dapat digunakan mahasiswa menggunakan HP Android sehingga penggunaannya sangat praktis pada saat dimanapun dan kapanpun. (2) Mitra selalu memberikan arahan dan masukan tentang pembuatan intrumen penelitian baik materi maupun desain aplikasi, pembuatan E-Modul Aplikasi berbasis Socrates, buku berpikir kritis serta bagaimana penggunaan aplikasi yang sesuai dengan karakteristik mahasiswa matematika. (3) Mitra berperan menjadi oberver dan tenaga pelaksana uji coba kepraktisan yang dilaksanakan secara daring sehingga pelaksanaan uji coba menghasilkan produk aplikasi E-Modul yang praktis digunakan mahasiswa. (4) Mitra membantu dalam mendeseminasikan produk Aplikasi E-Modul Aljabar Linear kepada mahasiswa serta dosen Aljabar Linear. (5) Mitra membantu dalam menyusun luaran-luaran dalam penelitian serta pembuatan laporan kemajuan dan laporan akhir sehingga penelitian ini dapat berjalan dengan lancar dan mengupload luaran dan laporan penelitian secara tepat waktu. (6) Mitra membantu dalam pembuatan surat-surat di perguruan tinggi mitra agar penelitian dapat berjalan lancar.

F. **KENDALA PELAKSANAAN PENELITIAN**: Tuliskan kesulitan atau hambatan yang dihadapi selama melakukan penelitian dan mencapai luaran yang dijanjikan, termasuk penjelasan jika pelaksanaan penelitian dan luaran penelitian tidak sesuai dengan yang direncanakan atau dijanjikan.

Kendala dalam pelaksanaan penelitian antara lain:

1. Terdapat kendala dalam penggunaan aplikasi diantaranya yaitu terdapat satu mahasiswa dari Universitas Muhammadiyah Metro yang tidak bisa mendownload dikarenakan memori HP androidnya sudah kepenuhan, sehingga diharuskan menyiapkan *space* memori dengan menghapus beberapa video yang ada didalam hpnya. Memori aplikasi yang dibutuhkan dalam mendownload hanya 35 MB dan waktu yang dibutuhkan dalam menginstal hanya 2 menit. Jadi tidak terdapat masalah dalam penggunaan aplikasi. Ada dua mahasiswa dari Universitas Lampung yang tulisan didalam aplikasinya terlihat rapat-rapat jadi agak sulit membacanya, jadi oleh dosen disuruh untuk ke pengaturan HP androidnya kemudian pilih ukuran *font* dan *default*nya diperkecil sedikit sehingga tulisannya menjadi normal pada aplikasi dan dapat dibaca dengan baik. Hal ini dikarenakan pengaturan pada HP andoidnya berbeda dengan yang lainnya.
2. Terdapat perubahan luaran yang diperlukan. Luaran Tambahan berupa Artikel di Jurnal Nasional Terakreditasi Peringkat 2 yang seharusnya dipublish di Jurnal Al-Jabar Universitas Islam Negeri Bandar Lampung menjadi dipublish di Jurnal Aksioma terakreditasi sinta 2 dikarenakan artikel yang diterima *publish* di Jurnal Al-Jabar tahun 2021 sudah penuh sehingga dilakukan perubahan tempat *publish*. Selain ini untuk luaran tambahan yang diterbitkan di International Electronic Journal of Mathematics Education (IEJME) masih dalam tahap riview.

G. **RENCANA TINDAK LANJUT PENELITIAN:** Tuliskan dan uraikan rencana tindaklanjut penelitian selanjutnya dengan melihat hasil penelitian yang telah diperoleh. Jika ada target yang belum diselesaikan pada akhir tahun pelaksanaan penelitian, pada bagian ini dapat dituliskan rencana penyelesaian target yang belum tercapai tersebut.

Rencana tahapan selanjutnya yaitu pada tahun ke-2 penelitian akan dilakukan implementasi pembelajaran menggunakan aplikasi E-modul Aljabar Linear perguruan tinggi di Lampung dan diluar wilayah Lampung sehingga aplikasi bisa digunakan untuk semua perguruan tinggi. Implementasi akan dilaksanakan di Propinsi Lampung, Propinsi Jawa Timur dan Propinsi DKI Jakarta. Selain itu, pada tahun ke-2 akan dihasilkan luaran berupa (1) Terdapat 3 publikasi artikel prosiding pada *Converence*/Seminar Internasional di Pengindeks Bereputasi (Terbit). (2) HKI Program Komputer berupa Aplikasi E-Modul Aljabar Linear yang (telah bersertifikat), (3) Artikel di Jurnal Nasional Terakreditasi peringkat 1-3 (published) serta (4) Artikel pada jurnal internasional (published).

H. DAFTAR PUSTAKA: Penyusunan Daftar Pustaka berdasarkan sistem nomor sesuai dengan urutan pengutipan. Hanya pustaka yang disitasi pada laporan akhir yang dicantumkan dalam Daftar Pustaka.

1. Pamungkas, P., Rizki, S. & Vahlia, I. (2020). Pengembangan Modul Matematika Berbasis Discovery Learning Disertai Nilai Nilai Islam. *Jurnal Emteka*. 1(1), 1-10.
2. Restiyowati & Sanjaya, G.I.M. (2012). Pengembangan E-Book Interaktif Pada Materi Kimia Semester Genap Kelas XI SMA. *Journal of Chemical Education*. 1(1), 23-30.

3. Sukir, Nurkhamid & Nurdiyansyah. (2019). Kelayakan E-Modul Berbasis Android Untuk Mendukung Pembelajaran Aplikasi PLC Sebagai Pengendali Mesin Pengisi Dan Penutup Botol Otomatis. *Jurnal Edukasi Elektro*. 3(2), 88-98.
4. Vahlia, I. dkk. (2021). Analisis Kebutuhan Pengembangan Bahan Ajar Aljabar Linear Bagi Mahasiswa Pendidikan Matematika. *Jurnal Aksioma*. 10(1), 1182-1189.
5. Yunarti, T. 2016. *Metode Socrates dalam Pembelajaran Berpikir Kritis*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Dokumen pendukung luaran Wajib #1

Luaran dijanjikan: Buku Ajar

Target: Online ber ISBN
Dicapai: Terbit

Dokumen wajib diunggah:
1. Buku ajar meliputi cover, lembar yg memuat ISBN dan daftar isi
2.
Surat keterangan terbit dari penerbit dengan menyebutkan jumlah eksemplar yang dice
tak

Dokumen sudah diunggah:
1. Buku ajar meliputi cover, lembar yg memuat ISBN dan daftar isi
2.
Surat keterangan terbit dari penerbit dengan menyebutkan jumlah eksemplar yang dice
tak

Dokumen belum diunggah:
- Sudah lengkap

Ira Vahlia, Dwi Rahmawati, Mustika, Tina Yunarti, Nurhanurawati

MODUL
ALJABAR LINEAR
BERBASIS SOCRATES

Penerbit LADUNY ALIFATAMA
Anggota IKAPI
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49, Kota Metro – Lampung.
Telp. 085269181545 - 0811361113

ISBN:978-623-6031-89-6
9 786236 031896

MODUL ALJABAR LINEAR BERBASIS SOCRATES

MODUL
ALJABAR LINEAR
BERBASIS SOCRATES

Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Si.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

MODUL ALJABAR LINEAR BERBASIS SOCRATES

Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Si.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

MODUL ALJABAR LINEAR

BERBASIS SOCRATES

Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Si.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

LADUNY
Maju Karena Ilmu

MODUL
ALJABAR LINEAR
BERBASIS SOCRATES

Penulis :
Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Si.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

Desain Cover
Team Laduny Creative

ISBN : 978-623-6031-89-6
16 x 24 cm; 83 hal

Cetakan Pertama, September 2021

Dicetak dan diterbitkan oleh:
CV. LADUNY ALIFATAMA
(Penerbit Laduny) Anggota IKAPI
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49 Iringmulyo, Metro – Lampung.
Telp. 0725 (7855820) – 085269181545
Email: ladunyprinting@gmail.com

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Segala puji bagi Allah, SWT karena atas rahmat dan hidayah Nya Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates dapat diselesaikan dengan baik. Modul ini disusun berdasarkan pengalaman penyusun dalam mengajar aljabar linear. Selain itu, modul ini juga disusun dari banyak sumber belajar yang telah terpublikasi. Modul ini membahas materi aljabar linear antara lain tentang konsep ruang vektor, basis dan dimensi, ruang eigen dan diagonalisasi, ruang hasil kali dalam dan transformasi linear. Modul Aljabar Linear ini disusun sebagai pedoman untuk membantu mahasiswa dalam memahami materi, sehingga proses belajar mengajar dapat berjalan dengan lebih baik. Penyajian dan pembahasan materi dalam modul diharapkan dapat dengan mudah diikuti dan dipahami oleh semua mahasiswa. Untuk itu, didalamnya juga terdapat masalah terkait materi yang harus didiskusikan secara kelompok oleh mahasiswa. Bahan diskusi mahasiswa disusun berbasis Socrates yaitu penyajian materi dengan serangkaian pertanyaan yang diharapkan mahasiswa dapat menemukan jawabannya berdasarkan kemampuan yang dimiliki. Selain itu melalui pertanyaan ini, mahasiswa dapat melatih kemampuan berprikir kritis. Untuk memperdalam pemahaman mahasiswa juga diberikan latihan sebagai tugas individu yang harus diselesaikan mahasiswa.

Mahasiswa yang mengikuti perkuliahan dengan menggunakan modul ini diharapkan tidak mengandalkan modul ini saja melainkan harus menggunakan sumber belajar lain terkait materi. Selain itu mahasiswa dapat mencari sumber belajar di internet, membaca jurnal dan buku di perpustakaan. Semoga modul ini bermanfaat bagi pengguna.

Ucapan terima kasih kepada KEMENRISTEK DIKTI, Universitas Muhammadiyah Metro dan semua pihak yang telah membantu terselesaikannya modul ini. Modul ini masih sangat jauh dari sempurna, untuk itu saran dan komentar untuk perbaikan sangat ditunggu.

Metro, Agustus 2021
Penyusun

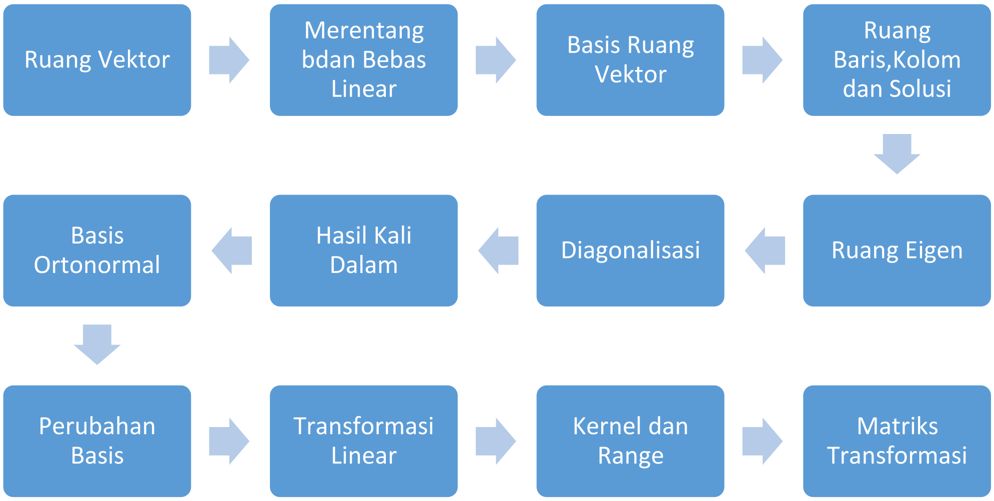
Tim Penyusun

PETUNJUK PENGGUNAAN

MODUL
ALJABAR LINEAR
BERBASIS SOCRATES

1. Berdoalah terlebih dahulu sebelum mulai menggunakan modul ini.
2. Pahamilah capaian pembelajaran yang akan dicapai dalam setiap kegiatan perkuliahan.
3. Pahami ringkasan materi yang ada pada setiap kegiatan perkuliahan.
4. Diskusikan dengan sesama mahasiswa bahan diskusi yang ada pada setiap kegiatan perkuliahan
5. Kerjakan latihan yang ada pada setiap kegiatan perkuliahan.
6. Setelah Anda menuntaskan materi pada satu kegiatan pada modul ini, Anda bisa melanjutkan untuk mempelajari materi pada kegiatan berikutnya.

PETA MATERI



Ruang Vektor
Merentang bdan Bebas Linear
Basis Ruang Vektor
Ruang Baris,Kolom dan Solusi
Ruang Eigen
Diagonalisasi
Hasil Kali Dalam
Basis Ortonormal
Perubahan Basis
Transformasi Linear
Kernel dan Range
Matriks Transformasi

DAFTAR ISI

RUANG VEKTOR DAN SUB RUANG VEKTOR

A. Capaian Pembelajaran

Menjelaskan aksioma ruang vektor dan sub ruang vektor
Mengidentifikasi himpunan merupakan ruang vektor atau bukan
Mengidentifikasi himpunan merupakan sub ruang vektor atau bukan

B. Ringkasan Materi

RUANG VEKTOR

Pada bab ini akan dibahas konsep ruang vektor yang lebih luas. Suatu struktur himpunan vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Pada materi ini hanya akan dibahas ruang vektor dengan skalar bilang real.

Definisi:

Misal V adalah sebarang himpunan tak kosong dimana dua operasi didefinisikan yaitu penjumlahan dan perkalian skalar real. V disebut ruang vektor, jika dipenuhi syarat sebagai berikut:

1. Untuk setiap u, v ϵ V maka u + v ϵ V (tertutup terhadap penjumlahan)
2. Untuk setiap u + v = v + u (komutatif)
3. Untuk setiap u + (v + w) = (u + v) + w (asosiatif)
4. Ada 0 ϵ V yang disebut vektor nol/ identitas untuk V dan berlaku: 0 + u = u + 0 = u, untuk semua u dalam V (anggota identitas).
5. Untuk setiap u ϵ V, ada –u ϵ V yang disebut negatif dari u sehingga berlaku: u+(-u)=(-u) + u = 0 (anggota invers)
6. Untuk setiap *k* adalah sebarang skalar dan untuk setiap u ϵ V maka *k*u ϵ V (tertutup terhadap perkalian skalar).
7. Untuk setiap u, v ϵ V dan setiap skalar *k*, berlaku *k* (u + v) = *k*u + *k*v (distributif skalar)
8. Untuk setiap u, v ϵ V dan setiap skalar *k*, berlaku (*k* + *l*) u = *k*u + *l*u (distributif skalar)
9. Untuk setiap u, v ϵ V dan setiap skalar *k*, *l* berlaku *k*(*l*u) = (k*l*) u (asosiatif skalar)
10. Untuk setiap u ϵ V , berlaku 1u = u (perkalian dengan skalar 1)

SUBRUANG VEKTOR

Definisi:

Misalkan V merupakan ruang vektor. U merupakan sub himpunan V dan U tidak kosong, maka U merupakan sub ruang vektor V jika U ruang vektor dibawah operasi yang sama dengan di V.

Teorema:

Misalkan V merupakan ruang vektor. U merupakan sub himpunan V dan U tidak kosong, maka U merupakan sub ruang vektor V jika dan hanya jika berlaku:

1. Jika u, v ∈U maka u + v ∈U.
2. Jika u ∈ U dan k skalar maka ku ∈ U.

C. Bahan Diskusi

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. Himpunan vektor di bidang (R^2) dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar. Apakah R^2 merupakan ruang vektor?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa R^2 merupakan ruang vektor?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa R^2 bukan ruang vektor?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

2. Himpunan matriks $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada matrik. Apakah M ruang vektor?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa M merupakan ruang vektor?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa M bukan ruang vektor?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apa ada cara lain untuk menyelesaikan?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

3. $P = \{ax^2 + bx + c|c = 0;\ x, y \in R\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar. Apakah V merupakan ruang vektor?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa P merupakan ruang vektor?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa P bukan ruang vektor?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

4. $V = \{(x, y, z) | x + y + z = 1;\ x, y, z\ \in R\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar. Apakah V merupakan ruang vektor?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa R^2 merupakan ruang vektor?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa R^2 bukan ruang vektor?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. $V = \{(0, y) |\ x, y \in R\}$, R^2. Apakah V merupakan sub ruang vektor R^2?

   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa V merupakan sub ruang vektor R^2?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa V bukan merupakan ruang vektor R^2?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

2. $V = \{(x, y, z) | \ x - y + z = 3\}$, R^3. Apakah V merupakan sub ruang vektor R^3?

   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   …………………………………………………………………………

   Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa V merupakan sub ruang vektor R^3?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa V bukan merupakan ruang vektor R^3?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

D. Latihan

1. Selidiki apakah himpunan dengan operasi-operasi yang diberikan merupakan ruang vektor!
   a. $V = \{(x, y) | x + y = 0;\; x, y \in R\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar.
   b. $M = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in R\right\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada matriks.
   c. $P = \{ax^2 + bx + c | a + b + c = 0;\; a, b, c \in R\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar.
   d. $M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| ad - bc = 0;\; a, b, c, d \in R\right\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada matriks.
   e. $V = \{(x, 0) |\; x \in R\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar.
2. Selidiki apakah himpunan berikut merupakan sub ruang vektor dari masing-masing ruang vektor yang diberikan:
   a. $M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in R\right\}$; M_{2x2}
   b. $P = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \;\in Z^+\}$; P^3
   c. $P = \{ax^2 + bx + c | a + b + c = 0\}$; P^3

d. $V = \{(x, y, 0) |\ x, y \in R\}$;$R^3$

e. $M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a + b = 0;\ a, b, c, d \in R\right\}$; M_{2x2}

MERENTANG DAN BEBAS LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

Mengidentikasi suatu vektor merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor atau tidak;
Mengidentifikasi suatu himpunan vektor merentang atau tidak merentang;
Mengidentifikasi suatu himpunan vektor bebas linear atau tidak bebas linear.

B. Ringkasan Materi

Merentang dan Bebas Linear

Sebelum membahas merentang dan bebas linear terlebih dahulu diberikan definisi tentang kombinasi linear.

Definisi:

Sebuah vektor v dikatakan kombinasi linear dari vektor v_1, v_2, v_3, …., v_n jika dapat dinyatakan dalam bentuk $v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_2v_2 + \ldots.. + k_nv_n$, dengan k_1, k_2, k_3, …, k_n adalah skalar.

Atau dapat dikatakan:

Vektor v dikatakan kombinasi linear dari vektor v_1, v_2, v_3, …., v_n jika diperoleh SPL $v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_2v_2 + \ldots.. + k_nv_n$ yang mempunyai solusi (konsisten).

Definisi:

Misal V adalah ruang vektor dan W adalah himpunan vektor di V. Jika untuk setip vektor sembarang di V merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di W ditulis V = Rent (W), maka W dikatakan merentang V

Definisi

Misal V ruang vektor dan W himpunan vektor-vektor di V maka W dikatakan bebas linear di V jika $k_1v_1 + k_2v_2 + k_2v_2 + \ldots.. + k_nv_n = 0$ mempunyai penyelesaian trivial atau $k_1= k_2=k_3= \ldots= k_n = 0$. Dan jika ada penyelesaian lainnya yang tidak nol maka W dikatakan tak bebas linear/ bergantung linear.

C. Bahan Diskusi

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. Apakah vektor v = (3, 10, -5) merupakan kombinasi linear dari vektor v_1 = (0, 2, -1) dan v_2 = (1, 2, -1)?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa v merupakan kombinasi linear v_1 dan v_2?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa v bukan merupakan kombinasi linear v_1 dan v_2?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

2. Apakah vektor v = (3,3) merupakan kombinasi linear dari vektor v_1 = (1, -1) dan v_2 = (-2, 2,)?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa v merupakan kombinasi linear v_1 dan v_2?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa v bukan merupakan kombinasi linear v_1 dan v_2?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apa ada cara lain untuk menyelesaikan?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

3. Apakah W={v_1, v_2} dengan v_1 = (0,1), v_2 = (1,0) merentang $V = \{(x, y)|x, y \in R\}$.

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa W merentang V?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, mengapa Anda berpikir bahwa W tidak merentang V?

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4. Apakah A= $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}\right\}$ merentang M_{2x2}?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa A merntang M_{2X2}?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, mengapa Anda berpikir bahwa A tidak merntang M_{2X2}?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

5. Apakah W = {(4, -1, 2), (-4, 10, 2)} bebas linear pada R^3?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa W bebas linear pada R^3?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, mengapa Anda berpikir bahwa W tidak bebas linear pada R^3?

……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

6. Apakah $A = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ bebas linear pada M_{2x2}?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa A bebas linear pada M_{2x2}?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, mengapa Anda berpikir bahwa A tidak bebas linear pada M_{2x2}?

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

D. Latihan

1. Selidiki apakah vektor v = (0, 4, 5) adalah kombinasi linear dari vektor v_1 = (0, -2, 2) dan v_2 = (1, 3, -1)? Jika ya, tentukan skalarnya!
2. Apakah matriks $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah kombinasi linear dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$? Jika ya, tentukan skalarnya!
3. Apakah vektor a = (2, 2, 2), b = (0, 0, 3), dan c = (0, 1, 1) merentang R^2? Berikan penjelasan alasan terhadap jawaban Anda!
4. Apakah polinom p(x) = 1 – x + $2x^2$, q(x) = 3 + x, r(x) = 5 – x + $4x^2$ dan s(x) = -2 – 2x + $2x^2$ merentang P_2? Berikan penjelasan alasan terhadap jawaban Anda!
5. Apakah W = {(8, -1, 3), (4, 0, 1)} bebas linear pada R^3? Tunjukkan alasan jawaban Anda!
6. Apakah p(x) = 3 – 2x + x^2, q(x) = 6 -4x + $2x^2$ bebas linear pada P_2? Tunjukkan alasan jawaban Anda!

BASIS DAN DIMENSI

A. Capaian Pembelajaran

Menjelaskan definisi basis dari himpunan vektor
Menentukan basis dari himpunan vektor
Menentukan dimensi dari himpunan vektor

B. Ringkasan Materi

BASIS

Definisi:

Misal V ruang vektor dan S = $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ himpunan vektor-vektor di V, maka S disebut basis untuk V jika memenuhi:

a. S bebas linear
b. S merentang V

Setiap ruang vektor dapat mempunyai basis lebih dari satu/ tidak tunggal. Basis ruang vektor ada 2 yaitu basis standar/ baku dan basis tidak standar/ tidak baku.
Basis standar untuk R^n:
S = $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ dg $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.
Basis Standar untuk P_n:
S = $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$
Basis standar untuk M_{2X2}:

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

DIMENSI

Dimensi dari ruang vektor didefinisikan sebagai bilangan kardinal dari basisnya yaitu banyak unsur basis ruang vektor tersebut.

Definisi:

Suatu ruang vektor berdimensi berhingga yang dinyatakan dengan dim(V), didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam suatu basis untuk V. Didefinisikan juga bahwa ruang vektor nol mempunyai dimensi nol.

dim (R^n) = n
dim (P_n) = n + 1
dim (M_{2x2}) = 4

Misal A ruang vektor dengan dim (A) = n. Jika S = {v_1, v_2, ….., v_r} merentang A atau bebas linear maka S merupakan basis dari A.

Basis dan Dimensi dari Subruang Vektor

Misal A ruang vektor dengan dim (A) = n dan B merupakan subruang vektor dari A. Maka B punya basis dan dim (B) ≤ dim (A).

C. Bahan Diskusi

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. Apakah S = {(2, 1), (3, 0)} merupakan basis dari R^2?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa S merupakan basis R^2?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa S merupakan bukan basis R^2?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2. Apakah K = $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ merupakan basis untuk P_2?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa K merupakan basis untuk P_2?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa K bukan merupakan basis untuk P_2?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apa ada cara lain untuk menyelesaikan?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

3. Apakah $V = \{(x, y, z) | x = z\}$ merupakan subruang vektor dari R^3. Tentukan basis dan dimensi dari V?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Mengapa Anda berpikir demikian?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

4. Apakah $A=\left\{\begin{bmatrix}0 & b\\ c & 0\end{bmatrix} \middle| c, b \in R\right\}$ subruang vektor M_{2x2}, Tentukan basis dan dimensi dari A?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Mengapa Anda berpikir demikian?

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

D. Latihan

1. Apakah himpunan vektor-vektor berikut merupakan basis dari vektor yang diberikan? Jelaskan!
   a. S = {(2, 0), (0, 2)}; untuk R^2
   b. $M = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$; untuk M_{2X2}
   c. Q = {$(1+x+x^2)$, (x-1)}; untuk P_2
   d. V = {(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)}; untuk R^3
2. Tentukan basis dari ruang vektor yang diberikan berikut:
   a. {(a, b, c, d)|b = a + c}; R^4
   b. {$(ax^3 + bx^2 + cx + d)$| a + b + c = 0}; P_3
   c. $M = \left\{\begin{bmatrix}a & b\\b & a\end{bmatrix}\right\}$; M_{2X2}
   d. {(a, b, c, 0)}; R^4
3. Tentukan dimensi dari ruang vektor yang diberikan berikut:
   a. {(a, b, c, d) | d = a + b; c = a-b}; R^4
   b. {(a, b) | a = b}; R^2
   c. $A = \left\{\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \middle| a = -d\right\}$; M_{2X2}

RUANG BARIS, KOLOM DAN SOLUSI

A. Capaian Pembelajaran

Menjelaskan definisi ruang baris, ruang kolom dan ruang solusi,
Menentukan ruang baris, ruang kolom dan ruang solusi
Menentukan dimensi ruang baris, kolom dan solusi

B. Ringkasan Materi

RUANG BARIS DAN KOLOM

Suatu matriks A_{mxn} tersusun oleh vektor-vektor baris atau vektor-vektor kolom. Misal matrik A_{mxn} sebagaiberikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektor baris dari A adalah vektor-vektor dengan $r_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$, dimana i = 1, 2, …., m. Ruang baris dari A adalah subruang R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A. Vektor kolom dari A adalah vektor-vektor dengan $c_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{mj})$, dimana j = 1, 2, …., n. Ruang kolom dari A adalah subruang R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari A. Untuk menentukan basis ruang baris dari A dapat dilakukan dengan melakukan OBE pada A^t, sedangkan Untuk menentukan basis ruang kolom dari A dapat dilakukan dengan melakukan OBE pada A. Dimensi ruang baris sama dengan dimensi ruang kolom yang disebut Rank dari A.

RUANG SOLUSI

Suatu sistem persamaan linear homogen dengan n peubah dan m persamaan ($AX = 0$, A_{mxn}), jika SPL homogen mempunyai solusi tak trivial/ sejati maka solusi dapat dituliskan dalam bentuk parameter. Himpunan solusi SPL homogen akan membentuk ruang vektor yang disebut **ruang solusi atau ruang null dari A**. Ruang solusi SPL homogen merupakan subruang dari R^n. **Dimensi ruang solusi dari A** disebut **nullitas A**. Nullitas A atau dimensi dari ruang solusi adalah banyaknya parameter.

C. Bahan Diskusi

Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Tentukan basis ruang kolom dari A!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Berdasarkan jawaban Anda di atas, berapa dimensi ruang kolom dari A?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

2. Tentukan ruang baris dari A!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

.Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Berdasarkan jawaban Anda di atas, berapa dimensi ruang kolom dari A?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

3. Berdasarkan jawaban no 1 dan 2 di atas, apakah dimensi ruang kolom sama dengan dimensi ruang baris? Berikan alasan terhadap jawaban Anda!

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Diberikan vektor-vektor $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (-3, 3, 7, 1)$, $v_3 = (-1, 3, 9, 3)$ dan $v_4 = (-5, 3, 5, -1)$.

4. Tentukan basis dari ruang yang direntang v_1, v_2, v_3 dan v_4 ! Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

5. Perhatikan SPL homogen berikut:

$2x - 3y + z = 0$

$4x - 6y + 2z = 0$

$-6x + 9y - 3z = 0$

Tentukan basis dari ruang solusi SPL homogen di atas!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Berdasarkan jawaban Anda di atas, berapa dimensi ruang solusi dari SPL homogen di atas?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

D. Latihan

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

1. Tentukan vektor baris dan vektor kolom dari A!
2. Tentukan basis dari ruang kolom dari A!
3. Tentukan basis dari ruang baris dari A!
4. Tentukan dimensi ruang baris dan dimensi ruang kolom dari A!

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5. Tentukan vektor baris dan vektor kolom dari B!
6. Tentukan basis dari ruang kolom dari B!
7. Tentukan basis dari ruang baris dari B!
8. Tentukan dimensi ruang baris dan dimensi ruang kolom dari B!

Diberikan SPL homogen sebagai berikut:

$2x + y + z + w = 0$

$-x - y - z + w = 0$

$y - z - w = 0$

$x - z - w = 0$

9. Tentukan basis ruang solusi dari SPL!

10. Tentukan dimensi ruang solusi!

NILAI EIGEN DAN RUANG EIGEN

A. Capaian Pembelajaran

Menjelaskan definisi vektor eigen, nilai eigen
Menentukan vektor, nilai eigen dan ruang eigen
Mengetahui sifat-sifat vektor eigen
Menentukan basis, rank dan nullitas ruang eigen

B. Ringkasan Materi

NILAI EIGEN

Definisi:

Misal A_{nxn}, maka vektor tak nol x ϵ R^n disebut **vektor eigen** dari matriks A jika terdapat **nilai eigen** λ sehingga berlaku $Ax = \lambda x$.

Misal λ_1 adalah salah satu nilai eigen dari matriks A, maka solusi SPL homogeny yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 : $(A-\lambda_1 \ I)x = 0$, akan membangun suatu ruang solusi dan disebut **Ruang Eigen** dari A yang bersesuaian dengan λ_1. Untuk menentukan basis ruang Eigen dari matriks A dapat dilakukan dengan:

a. Mencari semua nilai eigen
b. Menentukan basis ruang solusi SPL homogen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ yang merupakan basis ruang eigen.

C. Bahan Diskusi

Perhatikan matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} -8 & 21 & -9 \\ -14 & 31 & -13 \\ -22 & 45 & -19 \end{bmatrix}$.

1. Tentukan nilai eigen dari A (jika ada)!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2. Tentukan vektor eigen dari A (jika ada)!
Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3. Tentukan nilai eigen dari 2A (jika ada)!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

4. Tentukan nilai eigen dari A^2 (jika ada)!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

5. Tentukan nilai eigen dari A^{-1} (jika ada)!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

....

....

....

....

....

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

....

....

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

....

....

D. Latihan

1. Tentukan nilai eigen dari matriks berikut (jika ada):

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   a. Tentukan nilai eigen (λ) dan vektor eigen dari matriks A!

   b. Tunjukkan bahwa 3λ adalah nilai eigen dari matriks 3A!

   c. Tunjukkan bahwa λ^2 adalah nilai eigen dari matriks A^2!

   d. Apa yang dapat Anda simpulkan dari jawaban a, b dan c?

   e. Tentukan nilai eigen dari A^{-1}!

DIAGONALISASI

A. Capaian Pembelajaran

Mengidentifikasi suatu matriks dapat didiagonalisasi atau tidak

Mengidentifikasi suatu matriks dapat didiagonalisasi secara ortoganal atau tidak

Menentukan matriks diagonal

B. Ringkasan Materi

DIAGONALISASI

Jika matriks A_{nxn}, maka dapat ditentukan matriks P sehingga $P^{-1}AP$ merupakan **matriks diagonal**. Matriks A yang demikian disebut **dapat didiagonalisasikan**.

Langkah mendiagonalisasi matriks A_{nxn} adalah:

1. Tentukan semua nilai Eigen dari A (λ)
2. Tentukan semua unsur basis (vektor Eigen) dari A yang bersesuaian dengan λ.
3. Pilih matriks P yang mendiagonalisasi A dengan vektor kolom berupa vektor Eigen

Matrik A_{nxn} disebut matriks ortogonal jika $P^t = P^{-1}$.

Matriks A_{nxn} dapat didiagoanalisasi secara ortogonal jika terdapat matriks P ortogonal sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ merupakan matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Syarat matriks A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara ortogonal:
Misal matriks diagonalnya $P^{-1}AP = D$
Maka:
$PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1}$
$A = PDP^t$
$A^t = (PDP^t)^t$
$A^t = PD^tP^t$
$A^t = PDP^t$
$A^t = A$
Jadi matriks A_{nxn} dapat didiagonalisasi secara orthogonal jika A merupakan matriks simetri.

Langkah mendiagonalisasi matriks A_{nxn} secara ortogonal:

1. Tentukan semua nilai Eigen
2. Tetukan semua unsur basis (vektor Eigen) yang bersesuaian dengan λ
3. Tentukan bentuk ortonormal dari vektor Eigen

Pilih matriks ortogonal P yang mendiagonalisasi A dengan vektor kolom berupa bentuk ortonormal dari vektor Eigen

C. Bahan Diskusi

Perhatikan Matrik berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Apakah matriks A dapat didiagonalisasi?

   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa A dapat didiagonalisasi?

   ....

   ....

   ....

Jika ya,tentukan matriks yang mendiagonalisasikan dan matriks diagonalnya!

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa A tidak dapat didiagonalisasi?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2. Tentukan matriks yang mendiagonalisasi B secara orthogonal dan matrik diagonalnya!
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

D. Latihan

Selidiki apakah matriks A berikut dapat didiagonalisasi, Jika ya, tentukan matriks yang mendiagonalisasi:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks yang mendiagonalisasi A secara orthogonal dan tentukan matriks diagonalnya!

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

RUANG HASIL KALI DALAM

A. Capaian Pembelajaran

Menjelaskan definisi ruang hasil kali dalam suatu ruang vektor
Menyelidiki suatu ruang vektor merupakan ruang hasil kali dalam atau bukan
Mengetahui sifat-sifat ruang hasil kali dalam
Menentukan panjang dan besar sudut ruang hasil kali dalam

B. Ringkasan Materi

RUANG HASIL KALI DALAM (RHD)

Definisi:
Ruang hasil kali dalam suatu ruang vektor real V yang ditulis $\langle u, v \rangle$ adalah fungsi yang mengaitkan anggota V dengan bilangan real sedemikian sehingga memenuhi:

1. $\forall u, v \in V$ *berlaku* $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (kesimetrian)
2. $\forall u, v, w \in V$ *berlaku* $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ (penjumlahan)
3. $\forall u \in V$ *dan* $\forall$ *k skalar Real, berlaku* $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$ (kehomogenan)
4. $\forall u \in V, \langle u, u \rangle \geq 0$ dan $\langle u, u \rangle = 0$ jika u = 0 (kepositifan)

PANJANG DAN SUDUT DALAM RHD

Misal $u, v \in V$ dimana V ruang hasil kali dalam maka:

1. Panjang atau norm dari vektor u adalah $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$
2. Jarak antara dua vektor u dan v adalah d(u, v) = $\|u - v\| = \langle u - v, u - v \rangle^{\frac{1}{2}}$
3. Cosinus sudut antara u dan v adalah $\cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$, dimana u$\neq$ 0 dan v $\neq$ 0

C. Bahan Diskusi

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. u = (u_1, u_2) dan v = (v_1, v_2) adalah vektor-vektor ruang vektor R^2. Apakah $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ merupakan ruang hasil kali dalam?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa $\langle u, v\rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa $\langle u, v\rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} v & w \\ x & y \end{bmatrix}$ adalah matriks-matriks ruang vektor M_{2x2}. Apakah $\langle A, B \rangle = av + 2bw + cx + 3dy$ merupakan ruang hasil kali dalam?
Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa $\langle u, v \rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa $\langle u, v \rangle$ merupakan ruang hasil kali dalam?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Tentukan panjang, besar cosinus sudut dan jarak antara u dan v di dalam R^2 yang mempunyai hasil kali dalam: $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ dengan u = (u_1, u_2) dan v = (v_1, v_2).

3. u = (1, -2) dan v = (0, 3)

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

D. Latihan

1. Misalkan u = (u_1, u_2) dan v = (v_1, v_2). Selidiki apakah berikut merupakan hasil kali dalam:
   a. $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$
   b. $\langle u, v\rangle = 4u_1v_1 + 6u_2v_2$
   c. $\langle u, v\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$
2. Misalkan p = ax^2 + bx + c dan q = kx^2 + lx + m. Selidiki apakah berikut merupakan hasil kali dalam:
   a. $\langle p, q\rangle = 2ak + 3bl + cm$
   b. $\langle p, q\rangle = -ak + bl + 2cm$
3. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} v & w \\ x & y \end{bmatrix}$. Selidiki apakah berikut merupakan hasil kali dalam:
   a. $\langle A, B\rangle = av + bw + cx + dy$
   b. $\langle A, B\rangle = av + 2bw + cx + dy$
4. Misalkan $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$dan N=$\begin{bmatrix} v & w \\ x & y \end{bmatrix}$ pada M_{2x2} dengan hasil kali dalam $\langle A, B\rangle = av + bw + cx + dy$. Tentukan norm, besar cosinus dan jarak antara M dan N pada M_{2x2} dengan hasil kali dalam berikut:
   a. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$dan $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   b. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$dan $N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
5. Diketahui V adalah RHD. Jika a, b, c ϵV dan k skalar, tunjukkan bahwa:
   a. $\langle a, 0\rangle = \langle 0, a\rangle$
   b. $\langle a, b + c\rangle = \langle a, b\rangle + \langle a, w\rangle$
   c. $\langle a, kb\rangle = k\langle a, b\rangle$
   d. $\langle a - b, c\rangle = \langle a, c\rangle - \langle b, c\rangle$
   e. $\langle a, b - c\rangle = \langle a, b\rangle - \langle a, c\rangle$

BASIS ORTONORMAL

A. Capaian Pembelajaran

Menjelaskan basis orthogonal dan ortonormal

Menggunakan sifat-sifat basis orthogonal dan ortonormal

Menggunakan metode Gram Schimadt untuk menentukan basis ortonormal

B. Ringkasan Materi

BASIS ORTONORMAL

Definisi:
Dua vektor u dan v dalam RHD disebut orthogonal jika $\langle u, v\rangle = 0$
Definisi:
Misal V RHD dan U ⊆ V, v∈V dikatakan orthogonal pada himpunan U jika v orthogonal pada setiap anggota U atau $\langle u_i, v\rangle = 0$.
Definisi:
Misal V RHD dan U ⊆ V dengan $U = \{u_{1,} u_{2,} u_{3,} \ldots, u_n\}$, U dikatakan himpunan orthogonal jika setiap anggota U saling ortogonal atau $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ untuk setiap i≠j, I,j=1,2,3...n
Definisi:
Misal V RHD dan U ⊆ V dengan $U = \{u_{1,} u_{2,} u_{3,} \ldots, u_n\}$, U dikatakan himpunan ortonormal jika setiap anggota U saling orthogonal dan mempunyai norm 1 atau $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ untuk setiap i≠j, I,j=1,2,3...n dan $\langle u_i, u_i\rangle = 1$ untuk i=1,2,3...n.
Sifat:
Misal V RHD dan $v_{1,} v_{2,} v_{3,} \ldots, v_n \epsilon V$ maka himpunan orthogonal $W = \{v_{1,} v_{2,} v_{3,} \ldots, v_n\}$ bebas linear. Jika dimensi V adalah n maka $W = \{v_{1,} v_{2,} v_{3,} \ldots, v_n\}$basis ortogonal V dan $U = \{u_{1,} u_{2,} u_{3,} \ldots, u_n\}$ dengan $u = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ dengan i = 1, 2, 3, …,n merupakan basis ortonormal dari V.
Basis yang terdiri vektor-vektor ortonormal disebut basis ortonormal, sedangka basis yang terdiri vektor-vektor orthogonal disebut basis orthogonal.

Misal V RHD dan U ⊆ V.

a. Jika $\{u_{1,}u_{2,}u_{3,} \dots, u_r\}$ adalah basis ortonormal untuk U, dan v adalah sebarang vektor dalam V maka $Proy_{\mathrm{U}}v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \cdots + \langle v, u_r\rangle u_r$
b. Jika $\{u_{1,}u_{2,}u_{3,} \dots, u_r\}$ adalah basis ortogonal untuk U, dan v adalah sebarang vektor dalam V maka $Proy_{\mathrm{U}}v = \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle v,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \dots + \frac{\langle v,u_r\rangle}{\|u_r\|^2}u_r$

Proses Gram Schmidt

Proses Gram Schmidt merupakan proses yang digunakan untuk menentukan himpunan basis ortonormal dari RHD jika himpunan tersebut merupakan basis namun bukan himpunan orthogonal. Misal $U = \{u_{1,}u_{2,}u_{3,} \dots, u_n\}$ merupakan basis dari RHD V dan U tidak orthogonal, Jika $W = \{w_{1,}w_{3,} \dots, w_n\}$ merupakan basis ortonormal. Adapun langkah-langkah untuk menentukan W basis ortonornal adalah sebagai berikut:

a. w_1 merupakan vektor satuan u_1; $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
b. w_2 merupakan komponen u_2 yang orthogonal terhadap w_1 dan panjangnya 1; $w_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, w_1\rangle w_1}{\|u_2 - \langle u_2, w_1\rangle w_1\|}$
c. w_3 merupakan komponen u_3 yang orthogonal terhadap $\{w_1, w_2\}$ dan panjangnya 1; $w_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, w_1\rangle w_1 - \langle u_3, w_2\rangle w_2}{\|u_3 - \langle u_3, w_1\rangle w_1 - \langle u_3, w_2\rangle w_2\|}$
   ………………………………
d. w_n merupakan komponen u_n yang orthogonal terhadap $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$dan panjangnya 1 $w_n = \frac{u_n - \langle u_n, w_1\rangle w_1 - \langle u_n, w_2\rangle w_2 - \cdots - \langle u_n, w_{n-1}\rangle w_{n-1}}{\|\langle u_n, w_1\rangle w_1 - \langle u_n, w_2\rangle w_2 - \cdots - \langle u_n, w_{n-1}\rangle w_{n-1}\|}$

C. Bahan Diskusi

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. Misalkan u = (a, b, c) dan v = (d, e, f) adalah vektor dalam R^3 dengan hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = ad + be + cf$. Apakah u = (-1, 3, 2) dan v = (4, 2, -1) orthogonal?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa u dan v ortogonal?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa u dan v tidak ortogonal?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} v & w \\ x & y \end{bmatrix}$ adalah matriks dalam M_{2X2} dengan hasil kali dalam $\langle A, B \rangle = av + bw + cx$ + dy. Apakah $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & \frac{-9}{8} \end{bmatrix}$ orthogonal?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa A dan B ortogonal?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa A dan B tidak ortogonal?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

3. Misalkan u = (a, b, c) dan v = (d, e, f) adalah vektor dalam R^3 dengan hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = ad + 2be + cf$. Apakah v = (2, -1, 0) orthogonal terhadap $U = \{(2,2,3), (3,3,-1), (-4,-4,3)\}$? Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa v orthogonal U ?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa v tidak orthogonal U?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

4. Misalkan u = (a, b, c) dan v = (d, e, f) adalah vektor dalam R^3 dengan hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = ad + 2be + cf$. Apakah v = (0, -1, 0) orthogonal terhadap $U = \{(2,2,3), (3,3,-1), (-4,-4,3)\}$? Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa v orthogonal U?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa v tidak orthogonal U?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

5. Misalkan u = (a, b, c) dan v = (d, e, f) adalah vektor dalam R^3 dengan hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = ad + 3be + 2cf$. Apakah $U = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$ merupakan himpunan ortonormal?
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa U merupakan himpunan ortonormal?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa U bukan himpunan ortonormal?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

6. Misalkan u = (a, b, c) dan v = (d, e, f) adalah vektor dalam R^3 dengan hasil kali dalam $\langle u, v \rangle = ad + 3be + 2cf$. Apakah $U = \{(0,1,0), (0,0,1))\}$ merupakan himpunan ortogonal?
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa U merupakan himpunan ortogonal?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa U bukan himpunan ortogonal?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

7. Misalkan u = (a, b, c) dan v = (d, e, f) adalah vektor dalam R^2 dengan hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = ad + be + cf$.Tentukan basis ortonormal dari himpunan $W = \{(1,2), (-2,1)\}$?
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

8. Misalkan u = (a, b) dan v = (d, e) adalah vektor dalam R^2 dengan hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = ad + be$. Jika diberikan U= {(0,-1), (1,0)} basis ortonormal U dan v = (1 ,-1) ϵR^2 Tentukan proyeksi orthogonal dan proyeksi ortonormal v terhadap U?
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

9. Diketahui U={(1,1,1), (1, 2, 1), (-1,1,0)} merupakan basis R^3. Jika RHD R^3 didefinisikan $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Tentukan basis ortonormal U!
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

....

....

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

....

....

....

....

D. Latihan

1. Diketahui R^4 mempunyai hasil kali dalam Euclidean. Selidiki apakah vektor $u \epsilon R^3$ dimana u (-1, 1, 0, 2)
   a. v = (0, 0, 0, 0)
   b. v = (1, -1, 3, 0)
   c. v = (4, 0, 9, 2)
2. Diketahui $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$adalah basis untuk RHD U. Tunjukkan bahwa vektor nol adalah satu-satunya vektor dalam U yang orthogonal terhadap semua vektor basis tersebut!
3. Buktikan bahwa jika $u_1, u_2, \ldots, u_k$ adalah pasangan vektor yang orthogonal pada RHD U, maka $\|u_1 + u_2 + \cdots + u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_k\|^2$
4. Diketahui hasil kali dalam pada M_{2x2} adalah $\langle A, B\rangle = av + bw + cx$ + dy dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} v & w \\ x & y \end{bmatrix}$.
   a. Apakah $\left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ merupakan himpunan orthogonal, ortonormal atau tidak kedua-duanya?
   b. Apakah $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ merupakan himpunan orthogonal, ortonormal atau tidak kedua-duanya?
5. Tunjukkan bahwa $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}\right\}$ ortonormal jika R^2 memiliki hasil kali dalam $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, tetapi tidak ortonormal jika mempunyai hasil kali dalam Euclidean!
6. R^3 merupakan RHD dengan hasil kali dalam didefinisikan $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$. Dengan metode Gram Schmidt, tentukan basis ortonormal dari $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!

PERUBAHAN BASIS

A. Capaian Pembelajaran

Menentukan matriks transisi dari perubahan basis.

B. Ringkasan Materi

PERUBAHAN BASIS

Jika V merupakan ruang vektor dan $U = \{u_{1,} u_{2,} u_{3,} \dots, u_n\}$ basis dari V, maka setiap vektor v ϵV dapat dinyatakan sebagai:

$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \cdots + \langle v, u_n \rangle u_n$ Atau

Jika V merupakan ruang vektor dan $U = \{u_{1,} u_{2,} u_{3,} \dots, u_n\}$ basis dari V, maka setiap vektor v ϵV dapat dinyatakan sebagai:

$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$

Dengan demikian $k_i = \langle v, u_i \rangle$

Skalar k_1, k_2,…., k_n merupakan koordinat v relatif terhadap basis U. Sedangkan vektor koordinat dan matriks koordinat adalah sebagai berikut:

$(v)_U = (k_1, k_2, \dots, k_n)$

$$[v]_U = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Jika U adalah basis ortonormal untuk RHD dengan dimensi n dan jika $(v)_U = (u_{1,} u_{2,} u_{3,} \dots, u_n)$ dan $(w)_U = (w_{1,} w_{2,} w_{3,} \dots, w_n)$ maka:

a. $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_n^2}$
b. $d(u, w) = \sqrt{(u_1 - w_1)^2 + (u_2 - w_2)^2 + \cdots + (u_n - w_n)^2 +}$
c. $\langle u, w \rangle = u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n$

Misal $U = \{u_{1,} u_{2,}\}$ dan $W = \{w_{1,} w_{2,}\}$ adalah basis dari ruang vektor V maka matriks transisi dari basis U ke W adalah:

$$P = [[u_1]_W | [u_2]_W | \dots | [u_n]_W]$$

C. Bahan Diskusi

Perhatikan himpunan vektor berikut:

1. Diketahui basis dari R^3 adalah $U = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$. Tentukan vektor v ϵR^3, jika $[v]_U = \begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}$!

   Bagaimana Anda Menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2. Diketahui $A = \left\{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right\}, B = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$merupakan basis dari R^2. Tentukan:

a. Matriks transisi dari basis A ke B

   Penyelesaian:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

b. Matriks transisi dari basis B ke A
   Penyelesaian:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

D. Latihan

1. Diberikan $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,dan basis $V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$. Tentukan:
   a. Vektor koordinat u relatif terhadap V
   b. Matriks koordinat u relatif terhadap V
2. Diketahui basis dari R^3 adalah $A = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$. Tentukan:
   a. Matriks transisi dari basis A ke basis B
   b. Matriks transisi dari basis B ke basis A
   c. Matriks koordinat $[u]_B$ dengan $u = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$
   d. Matriks koordinat $[u]_C$ dengan $u = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

TRANSFORMASI LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

Mengetahui definisi transformasi linear
Mengetahui suatu fungsi transformasi linear atau bukan
Mengkaji sifat-sifat transformasi linear

B. Ringkasan Materi

TRANSFORMASI LINEAR

Definisi:
Misalkan V dan W adalah ruang vektor. Suatu fungsi T yang memetakan suatu vektor di V ke vektor di W, $T: V \rightarrow W$ disebut transformasi linear jika berlaku:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall\, u, v \in V$
2. $T(k.u) = k.T(u), , \forall\, u \in V \; dan \; k \; skalar$

Untuk kasus khusus dimana V = W maka transformasi linear $T: V \rightarrow V$ disebut operator linear pada V.

Sifat:
Jika $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linear maka:

1. T(0) = 0
2. T(-v) = -v
3. T(v-w) = T(v) – T(w)

Sifat:
Jika $T: V \rightarrow W$ disebut transformasi linear dan jika $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah basis V, maka T(v) dapat ditentukan dengan menggunakan T(v_1), T(v_2), …., T(v_n). Adapun caranya yaitu dengan menyatakan v sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis atau dituliskan sbb:

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

Kemudian dengan menggunakan rumus definisi Transformasi linear akan diperoleh:
T(v) = T($k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2)+….+ k_nT(v_n)

C. Bahan Diskusi

Perhatikan fungsi berikut dan selidiki apakah fungsi tersebut merupakan transformasi linear atau bukan:

1. $T: R^2 \rightarrow R^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa T merupakan transformasi linear?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa T bukan transformasi linear?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2. $T: M_{2x2} \rightarrow R$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b$

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa T merupakan transformasi linear?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa T bukan transformasi linear?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apa ada cara lain untuk menyelesaikan?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

3. $T: P_2 \rightarrow P_2$ dengan T(a + bx + cx^2) = 2 + (a+b)x + (b+c)x^2.

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa T merupakan transformasi linear?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa T bukan transformasi linear ?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

4. Misal M_{mxn} dan R adalah ruang vektor, pemetaan $T: M_{mxn} \rightarrow R$ dengan T(A) = det (A), $\forall A \in V$

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa T merupakan transformasi linear?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa T bukan transformasi linear?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

5. Buktikan sifat transformasi linear:

Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linear maka:

a. T(0) = 0
b. T(-v) = -v
c. T(v-w) = T(v) – T(w)

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

6. Diketahui $\{a, b, c\}$ adalah basis R^3 dengan a = (1, 1, -1), b = (0, 1, -1) dan c = (0, 0, -1). $T: R^3 \rightarrow P_3$ adalah transformasi linear yang didefinisikan dengan $T(a) = 1 - x + x^2, T(b) = 1 + 2x^2, T(c) = 2x - x^2$. Tentukan:

a. Rumus umum transformasi linear.
Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

b. T(1, 2, 3)
Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

D. Latihan

Untuk no 1-11, Selidiki apakah fungsi yang diberikan merupakan transformasi linear atau bukan!

1. Misalkan V dan W ruang vektor, pemetaan $T: V \rightarrow W$, dimana T(v) = $0, \forall\, v \in V$
2. Misalkan V ruang vektor, pemetaan $T: V \rightarrow V$, dimana T(v) = v $, \forall\, v \in V$
3. Misalkan V ruang vektor, pemetaan $T: V \rightarrow V$, dimana T(v) = k.v $, \forall\, v \in V$ dan k skalar

4. Misal P_n ruang vektor, pemetaan $T: P_n \to P_n$, dimana T(p(x)) = p(ax+b), , $\forall\, p(x) \in P_n$
5. Misalkan V ruang vektor dengan V adalah ruang hasil kali dalam dan v_0 adalah sebarang vektor tetap di V, pemetaan $T: V \to V$, dimana $T(v) = \langle v, v_0 \rangle\,, \forall\, v, v_0 \in V.$
6. Misalkan V adalah ruang vektor dari fungsi-fungsi dengan turunan pertama kontinu pada $(-\infty, \infty)$ dan W adalah ruang vektor dari semua fungsi bernilai real terdefinisi pada $(-\infty, \infty)$, pemetaan $T: V \to W$, dimana pemetaan suatu fungsi ke turunannya yaitu T(f(x)) = f'(x) , $\forall\, f(x) \in V$
7. Misalkan V adalah ruang vektor dari fungsi-fungsi dengan turunan pertama kontinu pada $(-\infty, \infty)$ dan W adalah ruang vektor dari semua fungsi bernilai real terdefinisi pada $(-\infty, \infty)$, pemetaan $T: V \to W$, dimana pemetaan suatu fungsi ke integralnya yaitu $T(f(x) = \int_0^x f(t)dt\,, \forall\, f(x) \in V$
8. Misalkan P_2 ruang vektor, pemetaan $T: P_2 \to P_2$ dengan T(a + bx + cx^2) = a + (a+b)x + (b+c)x^2.
9. Misalkan M_{2x2} dan R adalah ruang vektor, pemetaan $T: M_{2x2} \to R$ dengan $T(A) = Tr(A), \forall\, A \in M_{2x2}$
10. Misalkan M_{2x3} dan M_{3x2} adalah ruang vektor, pemetaan $T: M_{2x3} \to M_{3x2}$dengan $T(A) = A^T, \forall\, A \in M_{2x3}$
11. $T: R^3 \to R^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
12. Berdasarkan jawaban no 1-11 manakah pemetaan yang merupakan operator linear?
13. Diketahui $\{a, b, c\}$ adalah basis R^3 dengan a = (1, 1, 1), b = (1, 1, 0) dan c = (1, 0, 0). $T: R^3 \to R^3$ adalah transformasi linear yang didefinisikan dengan $T(a) = (1,0), T(b) = (2,-1), T(c) = (4,3)$. Tentukan:
    a. Rumus umum transformasi linear.
    b. T(2, 1, 3)

KERNEL DAN RANGE

A. Capaian Pembelajaran

Mengetahui definisi kernel dan range dari transformasi linear
Menentukan kernel dan range dari transformasi linear
Menentukan basis dan dimensi transformasi linear

B. Ringkasan Materi

KERNEL DAN RANGE

Definisi:
$T: V \to W$ adalah transformasi linear maka himpuan vektor di V yang dipetakan ke vektor 0 di W disebut kernel T atau ditulis sbb:
Ker (T) = $\{v \in V | T(v) = 0\}$
Definisi:
$T: V \to W$ adalah transformasi linear maka himpuan vektor di W yang merupakan peta/ bayangan dari v di V disebut Range T atau ditulis sbb:
R (T) = $\{w \in W | T(v) = w, v \in V\}$
Ker (T) dan R(T) merupakan sub ruang vektor dariV dan W maka Ker(T) dan R(T) juga merupakan ruang vektor. Hal ini berakibat Ker(T) dan R(T) mempunyai basis. Dimensi basis Ker(T) disebut nullitas dari T dan dimensi basis R(T) disebut rank dari T.
Sifat:
$T: V \to W$ adalah transformasi linear dari ruang vektor V berdimensi n ke ruang vektor W, maka Nulllitas dari T + Rank dari T = n
Sifat:
$T: R^n \to R^m$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh $T(v) = A_{mxn}v$, $\forall v \in R^n$, maka:
1. Nullitas dari T = nullitas (A)
2. Rank dari T = Rank (A)

C. Bahan Diskusi

Perhatikan transformasi linear berikut:
1. $T: R^3 \to R^2$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh $T(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} v$. Tentukan:

a. Ker (T)

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

b. R(T)

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

c. Basis Ker(T)

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

d. Basis R(T)

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

e. Nullitas dari T

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

f. Rank dari T

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2. $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linear. Apakah:
   a. Ker(T) merupakan sub ruang vektor V?

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa Ker(T) merupakan sub ruang vektor V?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa Ker(T) bukan merupakan sub ruang vektor V?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apa ada cara lain untuk menyelesaikan?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

b. R(T) merupakan sub ruang vektor W

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

Jika ya, mengapa Anda berpikir bahwa R(T) merupakan sub ruang vektor?

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

Jika bukan, mengapa Anda berpikir bahwa R(T) bukan merupakan sub ruang vektor?

…………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………......

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

…………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………......

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………......

D. Latihan

Tentukan Ker(T) dan R(T) dari transformasi linear berikut:

1. $T: R^2 \to R^2$ dengan T(x, y) = (2x-y, -8x +4y)
2. $T: P_2 \to P_3$ dengan T(p(x)) = x p(x)
3. $T: V \to V$ dengan T(v) = 3v
4. $T: R^3 \to R^3$ dengan $T(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} v$
5. $T: R^4 \to R^2$ dengan $T(v) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} v$

Tentukan nullitas dari T jika:

6. $T: R^5 \to R^7$merupakan transformasi linear dengan rank dari T adalah 3
7. $T: P_4 \to P_3$ merupakan transformasi linear dengan rank dari T adalah 1
8. $T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ merupakan transformasi linear dengan rank dari T adalah 3
9. $T: R^6 \to R^3$merupakan transformasi linear dengan R(T) adalah R^3

Tentukan basis kernel dan range, nullitas (T) dan Rank(T) dari transformasi linear berikut

10. $T: R^4 \to R^3$ dengan T(a, b, c, d) = (4a + b – 2c – 3d, 2a + b + c – 4d, 6a – 9c + 9d)
11. $T: R^3 \to R^3$ dengan $T(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

MATRIKS TRANSFORMASI LINEAR

A. Capaian Pembelajaran

Menentukan matriks transformasi
Menentukan basis dan dimensi matriks transformasi
Mengkaji sifat matriks transformasi maupun matriks standar
Menentukan matriks transisi untuk menentukan matriks transformasi

B. Ringkasan Materi

MATRIKS TRANSFORMASI LINEAR

Misalkan V dan W ruang vektor dengan dimensi n dan m. $T: V \rightarrow W$ oleh T(v), $\forall\, v \in V$ adalah Transformasi linear, maka transformasi T dapat dipandang sebagai matriks transformasi. Untuk menentukan peta v oleh T dapat dilakukan dengan cara:

1. Jika B adalah basis dari V dan C adalah basis dari W maka $\forall\, v \in V$ diperoleh matriks koordinat terhadap B atau $[v]_B \in V$ dan matrik koordinat terhadap C atau $[T(v)]_C \in W$
2. T merupakan transformasi linear yang memetakan $[v]_B \in V$ ke $[T(v)]_C \in W$ maka $A[v]_B = [T(v)]_C$
3. A merupakan matriks dari T terhadap B dan C, dengan A_{mxn} dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$

$$A = [[T(b_1)]_C | [T(b_2)]_C | \ldots | [T(b_n)]_C]$$

Matriks Standar

$T: R^n \rightarrow R^m$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh T(v) = Av. Basis standar R^2 adalah $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ maka matriks standar T adalah

$$A = [T(e_1) | T(e_2) | \ldots | T(e_n)]$$

C. Bahan Diskusi

Perhatikan transformasi linear berikut:

1. $T: R^2 \to R^3$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{pmatrix}$. Jika basis R^2 adalah $B = \{b_1, b_2\}$, dimana $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan basis R^3 adalah $C = \{c_1, c_2\}$, dimana $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukan matrik T terhadap terhadap basis B dan C!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2. $T: R^3 \rightarrow R^4$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ x-y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix}$. Tentukan matriks standar T!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3. $T: R^3 \to R^3$ didefinisikan oleh $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ x-z \end{bmatrix}$. Basis R^3 adalah $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. Tentukan matriks standar T!

Bagaimana Anda menyelesaikannya?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4. $T: P_2 \to P_2$ didefinisikan oleh T(p(x)) = p(2x + 1). Basis P_2 adalah $B = \{1, x, x^2\}$. Tentukan matriks T!
   Bagaimana Anda menyelesaikannya?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Apakah Anda yakin bahwa jawaban tersebut benar?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Jika tidak, apa yang membuat Anda berubah pikiran?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Apakah ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

D. Latihan

Tentukan matrik T terhadap basis yang diberikan dari transformasi linear berikut:

1. $T: P_1 \to P_2$ didefinisikan oleh T(p(x)) = x p(x). Basis P_1 adalah $B = \{1, x\}$ dan basis P_2 adalah $C = \{1, x, x^2\}$
2. $T: R^2 \to R^2$ didefinisikan oleh $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ -2x + 4y \end{bmatrix}$. Basis R^2 adalah $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
3. $T: P_2 \to P_3$ didefinisikan oleh T(p(x)) = x p(x). Basis P_2 adalah $B = \{1, x, x^2\}$ dan basis P_3 adalah $C = \{1, x, x^2, x^3\}$
4. $T: P_2 \to P_1$ didefinisikan oleh $T(a+bx+cx^2) = (a+b) - (2a+3b)x$. Basis P_2 adalah $B = \{1, x, x^2\}$ dan basis P_1 adalah $C = \{1, x\}$
5. $T: R^2 \to R^2$ didefinisikan oleh $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \end{bmatrix}$. Basis R^2 adalah $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2000. Elementary Linear Algebra. USA: John Wiley and Sons.

Anton, Howard., Rorres, Chris. 2004. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga

Leon, Steven J. 1998. Linear Algebra with Aplications. Prentice Hall, Inc

Mursita, Danang. 2010. Aljabar Linear. Bandung: Rekayasa Sains.

Sutojo, T., Bowo, N., Erna., Astuti, Setia., Rahayu, Yuniarsih.,Mulyanto, Edy. 2009. Aljabar Linier& Matriks. Andi Offset: Yogyakarta.

PENERBIT LADUNY ALIFATAMA
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49, 15 A Kampus Iringmulyo
Kota Metro - Lampung
Emai : ladunyprinting@gmail.com Hp. 085269181545

Nomor : 358/LA/09/2021
Sifat : BIASA
Lampiran : SATU BANDEL
Perihal : Surat Terbit

Metro, 8 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya bertandatangan dibawah ini:
Nama : Joni Wuryanto
Jabatan : Direktur Utama
Alamat : Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49, 15 A Kampus Iringmulyo Kota Metro - Lampung

Menyatakan bahwa buku yang berjudul
"Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates"
dengan spesifikasi sebagai berikut :

Penerbit	:	LADUNY ALIFATAMA
Jilid	:	Softcover
Nomor ISBN	:	978-623-6031-89-6
Penulis	:	Ira Vahli, M.Pd. Dr. Dwi Rahmawati, M. Pd. Mustika, M.Kom. Dr. Tina Yunarti, M.Si Dr. Nurhanurawati, M.Pd.
Cetak	:	50 Buku

Telah kami terbitkan, di Penerbit Laduny Alifatama.

Demikian surat Pernyataan ini kami buat, agar dipergunakan sebagaimana mestinya.
Atas perhatian dan kerjasamanya, kami ucapkan terimakasih.

Metro, 8 September 2021
Pimpinan Penerbit Laduny Alifatama

Joni Wuryanto, M.Pd.

Dokumen pendukung luaran Tambahan #1

Luaran dijanjikan: Artikel di Jurnal Nasional terakreditasi peringkat 1-3

Target: Accepted
Dicapai: Published

Dokumen wajib diunggah:
1.

Dokumen sudah diunggah:
1. Artikel yang terbit

Dokumen belum diunggah:
-

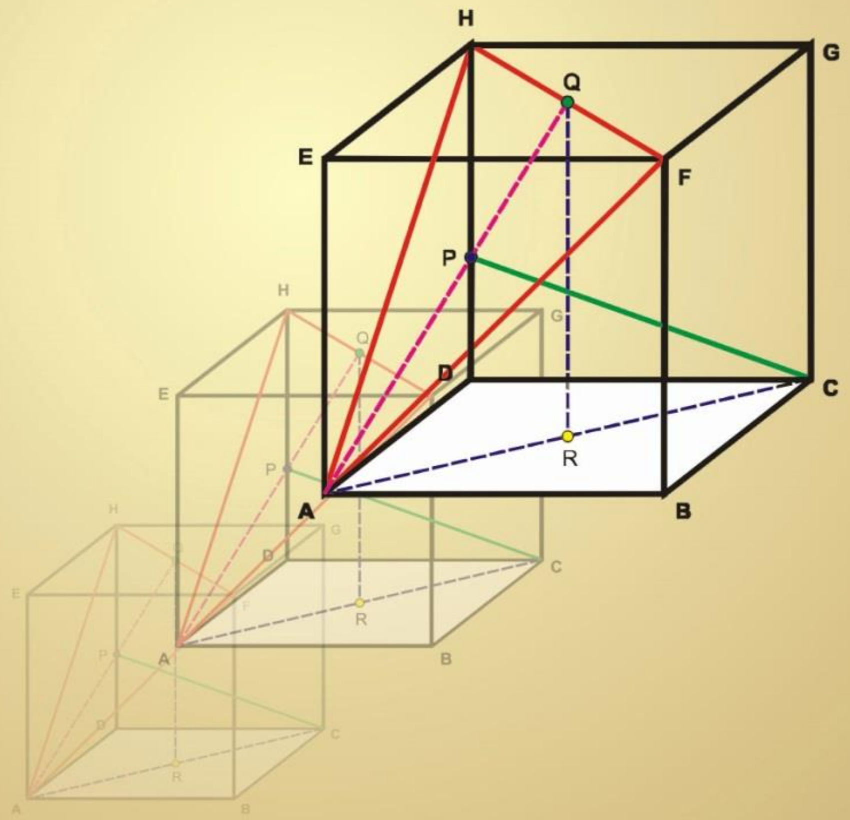
Volume 10, No.2, (2021)

ISSN 2089-8703 (Print)
ISSN 2442-5419 (Online)

AKSIOMA

JURNAL

Program Studi
PENDIDIKAN MATEMATIKA



FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO

AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika

TERAKREDITASI SINTA 2

Diterbitkan oleh:

Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Metro
JL. Ki Hajar Dewantara No. 116 Metro
Telp. 0812-7994-1343/ Fax. (0725) 42454
E-mail: aksioma.ummetro@gmail.com

ISSN 2089-8703 (Print)
ISSN 2442-5419 (Online)

AKSIOMA: JURNAL PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

Volume 10, Nomor 2, 2021

DAFTAR ISI

AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika ISSN 2089-8703 (Print)
Volume 10, No. 2, 2021, 1182-1189 ISSN 2442-5419 (Online)

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

ANALISIS KEBUTUHAN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR ALJABAR LINEAR BAGI MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA

Ira Vahlia[1], Dwi Rahmawati[2*], Mustika[3], Tina Yunarti [4], Nurhanurawati[5]

[1,2,3] Universitas Muhammadiyah Metro, Metro, Indonesia
[4,5] Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia
** Jl. Kihajar Dewantara Iringmulyo Metro Timur, 34111, Metro, Indonesia.*
E-mail: *iravahlia562@gmail.com* [1)]
dwirahamawati1083@gmail.com [2*)]
mustika@ummetro.ac.id [3)]
tina.yunarti@yahoo.co.id [4)]
nurha.nurawati@fkip.unila.ac.id [5)]

Received 07 April 2021; Received in revised form 09 June 2021; Accepted 30 June 2021

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bahan ajar aljabar linear yang perlu dikembangkan bagi mahasiswa pendidikan matematika. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif. Subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa pendidikan matematika yang menempuh mata kuliah aljabar linear tahun akademik 2019/2020 di Universitas Muhammadiyah Metro. Sampel dalam penelitian ini diperoleh dengan teknik *purposive sampling*. Teknik pengumpulan data antara lain teknik observasi, wawancara, tes dan angket. Data yang telah diperoleh kemudian dianalisis. Data hasil observasi, wawancara dianalisis dengan tahapan mentranskrip data, menelaah data, mereduksi data, mendeskripsikan dan membuat kesimpulan. Untuk data hasil angket dan tes dianalisis dengan metode statistik deskriptif. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bahan ajar pada perkuliahan aljabar linear masih menggunakan satu buah bahan ajar lama, mahasiswa membutuhkan bahan ajar yang mudah dipahami dan dapat digunakan secara mandiri, mahasiswa membutuhkan bahan ajar yang menuntun mahasiswa menemukan pengetahuan melalui pertanyaan-pertanyaan maupun langkah-langkah, serta mahasiswa membutuhkan bahan ajar yang mendukung dalam pembelajaran daring. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa perlu dikembangkan bahan ajar Aljabar linear sesuai karakteristik mahasiswa dan perkembangan teknologi yang ada. Bahan ajar berupa e-modul berbasis Socrates merupakan salah satu alternatif bahan ajar aljabar linear yang diperlukan dalam memfasititasi pembelajaran daring. Selain itu, dengan modul berbasis Socrates yang berisi pertanyaan yang dapat menuntun mahasiswa dalam menemukan pengetahuan secara mandiri.

Kata kunci: Bahan ajar; e-modul; Socrates.

Abstract

The purpose of this research was to determine linear algebra teaching material that needs to be developed for mathematics education students. This research is a qualitative descriptive study. The subjects in this study were mathematics education students taking linear algebra courses for the 2019/2020 academic year at Universitas Muhammadiyah Metro. The sample in this study was obtained by the purposive sampling technique. The research data were collected by observation, interview, test and questionnaire. Data from observations and interviews were analyzed with the stages of transcribing data, analyzing dta, reducing data, describing and making conclusions. The questionnaire and test data were analyzed using descriptive statistical methods. The result shows that the teaching materials in linear algebra lectures still used one old teaching material, Students needed teaching materials that were easy to understand and could be used independently, students needed teaching materials that led students to find knowledge through questions or steps, and students need teaching materials that support online learning. Based on the research results, it was concluded that it is necessary to develop linear algebra teaching materials according to the characteristics of students and existing technological developments. The teaching material in the form of a Socrates-based e-module is an alternative to the linear algebra teaching material needed to facilitate online learning. Also, with a Socrates-based module that contains questions that can guide students in finding knowledge independently.

Keywords: *E-module; Socrates; teaching material.*

AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika ISSN 2089-8703 (Print)
Volume 10, No. 2, 2021, 1182-1189 ISSN 2442-5419 (Online)

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

PENDAHULUAN

Pada era digital saat ini, baik dosen maupun mahasiswa harus mampu mengikuti perkembangan teknologi. Mahasiswa secara mandiri mengakses berbagai referensi ataupun sumber yang berhubungan dengan materi. Untuk dapat menguasai kompetensi yang dibutuhkan dalam dunia kerja, mahasiswa harus memiliki kemampuan yang terdiri atas aspek pengetahuan, sikap dan keterampilan umum dan khusus. Mahasiswa yang dapat terus berkembang, yaitu yang mempunyai kemampuan berpikir kritis, kreatif, produktif, mandiri, dan bekerjasama dengan baik. Kemajuan teknologi yang ada dapat diamati pada mahasiswa Universitas Muhammadiyah Metro kebanyakan memiliki *handphone android* dan laptop yang digunakan dalam pembelajaran untuk mencari sumber referensi melalui internet.

Aljabar linear merupakan matakuliah wajib mahasiswa program studi pendidikan matematika yang ditempuh pada semester 4 di Universitas Muhammadiyah Metro. Matakuliah ini berbobot 2 sks dengan capaian pembelajaran adalah mahasiswa dapat memahami konsep tentang vektor di R^2 dan R^3, ruang vektor Euclidean, ruang vektor umum, ruang hasil kali dalam, nilai eigen-vektor eigen dan transformasi linear.

Beberapa penelitian yang berkaitan dengan aljabar linier telah banyak dilakukan, seperti penelitian tentang penyelesaian soal aljabar linier menggunakan pendekatan *joint action studies* (Hariyani & Murniasih, 2019); peningkatan level berpikir aljabar (Jamil, 2017); pengembangan modul pembelajaran aljabar linier dan matriks dengan pendekatan inkuiri (Aminah & Radita, 2020); pengembangan materi aljabar linier dengan model *Problem Based Learning (PBL)* (Sinaga & Sijabat, 2020). Dari beberapa penelitian yang telah ada akan dijadikan dasar untuk pengembangan bahan ajar aljabar linear bagi mahasiswa pendidikan matematika universitas muhammadiyah metro.

Berdasarkan hasil analisis tes menunjukkan bahwa mahasiswa merasa kesulitan saat menyelesaikan permasalahan yang diberikan, seperti menginterpretasi masalah, analisis, evaluasi dan menarik kesimpulan. Mahasiswa masih sangat bergantung pada dosen saat menyelesaikan soal-soal yang ada. Indikator ini menunjukkan bahwa kemampuan berpikir kritis mahasiswa masih terbatas. Menurut hasil penelitian (Firdaus et al., 2015) diketahui bahwa berpikir kritis adalah salah satu indikator penting bagi mahasiswa untuk berkompetisi di dunia kerja dan kehidupan pribadi, mahasiswa harus memiliki kemampuan untuk menyelesaikan masalah dan harus mampu berpikir kritis. Hal ini menunjukkan bahwa penting bagi mahasiswa untuk memiliki kemampuan berpikir kritis. Salah satu faktor yang mempengaruhi kemampuan berpikir kritis adalah penggunaan bahan ajar yang tepat dalam proses pembelajaran. Hal ini sejalan dalam penelitian (Sari & Anantyarta, 2018), bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi kemampuan mahasiswa antara lain model atau metode pembelajaran, media pembelajaran, bahan ajar, sarana dan prasarana.

Lebih lanjut, hasil observasi menunjukkan bahwa bahan ajar yang digunakan dalam pembelajaran matakuliah aljabar linear pada saat ini masih sangat terbatas jenisnya yaitu berupa sebuah buku teks. Dan mahasiswa masih kesulitan dalam memahami materi dalam bahan ajar

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

tersebut. Mahasiswa butuh pendampingan setiap menggunakan bahan ajar tersebut, dengan kata lain bahan ajar yang ada belum bisa memfasilitasi mahasiswa belajar mandiri. Hasil penelitian (Dimas et al., 2017) mengatakan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam menggunakan bahan ajar berupa buku, sehingga diperlukam bahan ajar modul. Untuk itu perlu adanya bahan ajar yang dapat digunakan mahasiswa secara mandiri untuk mengonstruksi konsep salah satunya modul. Sejalan dengan perkembangan teknologi saat ini dan pelaksanaan pembelajaran secara daring, maka perlu ada bahan ajar yang dapat diakses mahasiswa secara daring sehingga memudahkan penggunaannya dalam pembelajaran saat ini.

Berdasarkan uraian di atas, tujuan penelitian ini untuk mengetahui bahan ajar aljabar linear yang perlu dikembangkan bagi mahasiswa pendidikan matematika. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi terkait bahan ajar yang akan dan perlu dikembangkan pada penelitian selanjutnya.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif. Subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa semester 4 pendidikan matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Metro yang menempuh mata kuliah aljabar linear. Sampel dalam penelitian ini diperoleh dengan teknik *purposive sampling*. Objek kajian dalam penelitian ini mencakup: 1) kesesuaian bahan ajar dengan materi, 2) bahan ajar yang digunakan oleh dosen, 3) kebutuhan mahasiswa terkait bahan ajar, dan 4) kesulitan mahasiswa dalam mempelajari materi aljabar linear. Tahapan penelitian terdiri dari tahapan prasurvei, pengumpulan data, pengolahan data dan pelaporan. Data penelitian dikumpulkan dengan teknik observasi, wawancara, tes dan penyebaran angket. Lembar observasi dan wawancara digunakan untuk memperoleh data penggunaan bahan ajar dalam pembelajaran aljabar linear. Sedangkan instrumen angket dan tes diberikan kepada mahasiswa. Angket digunakan untuk mengetahui pandangan tentang kebutuhan bahan ajar matematika, tes digunakan untuk mengetahui kemampuan berpikir kritis mahasiswa.

Teknik analisis data dilakukan dengan tahapan mentranskrip data, menelaah data, mereduksi data, mendeskripsikan, dan membuat kesimpulan untuk data wawancara dan observasi. Sedangkan data angket dan tes dianalisis secara kuantitatif dengan dijelaskan secara deskriptif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kemampuan berpikir kritis merupakan salah satu soft skill yang harus dimiliki mahasiswa guna menghadapi perkembangan dunia yang sangat cepat saat ini. Persaingan dunia kerja semakin kompetitif serta makin berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi informasi. Perguruan tinggi sebagai pelaksana pendidikan mempunyai peran dalam menyiapakan mahasiswa untuk dapat bersaing dimasa depan yang serba digital. Salah satu upaya yang dapat dilakukan yaitu meningkatkan kualitas pembelajaran untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis mahasiswa. Hal terkait pembelajaran harus mendukung dalam mengembangkan kemampuan berpikir kritis, salah satunya adalah penggunaan bahan ajar.

Berdasarkan tujuan penelitian dan perlunya mengembangkan kemampuan berpikir kritis mahasiswa, maka perlu

ISSN 2089-8703 (Print)
ISSN 2442-5419 (Online)

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

dilakukan analisis terlebih dahulu terkait kemampuan berpikir kritis mahasiswa. Data yang digunakan dalam analisis berpikir kritis mahasiswa diperoleh dari hasil UTS yang berbentuk soal *essay* yaitu soal satu sampai dengan tiga, didalamnya mengukur interpretasi masalah, analisis, evaluasi dan menarik kesimpulan. Adapun hasil analisis kemampuan berpikir kritis dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Analisis kemampuan berpikir kritis

Kemampuan Berpikir Kritis	**Soal *essay* 1**		**Soal *essay* 2**		**Soal *essay* 3**	
	Benar	**Salah**	**Benar**	**Salah**	**Benar**	**Salah**
Menginterpretasi masalah	19,85%	80,15%	15,01%	84,99%	9,55%	90,45%
Analisis	30,58%	69,42%	24,39%	75,61%	27,68%	72,32%
Evaluasi	12,66%	87,34%	37,21%	62,79%	14,63%	85,37%
Menarik kesimpulan	13,04%	86,96%	37,66%	62,34%	11,22%	88,78%
Rata-rata	**19,03%**	**80,97%**	**28,57%**	**71,43%**	**15,77%**	**84,23%**

Dari Tabel 1, diperoleh data bahwa mahasiswa yang menjawab dengan benar aspek berpikir kritis 19,03% pada soal *essay* 1, 28,57% soal *essay* 2 dan 15,77% soal *essay* 3, sehingga diperoleh rata-rata sebesar 21,12%. Ini menunjukkan bahwa kemampuan berpikir kritis mahasiswa matematika memiliki kategori sangat kurang. Hal ini terjadi pada keempat indikator berpikir kritis. Pada indikator menginterpretasi masalah soal, rata-rata mahasiswa menjawab benar 14,80% atau dalam kategori sangat kurang. Untuk indikator analisis, rata-rata mahasiswa menjawab benar sebesar 27,55% atau dalam kategori sangat kurang. Sedangkan untuk aspek evaluasi dan menarik kesimpulan masing-masing sebesar 20,51% dan 20,64% yang termasuk kategori sangat kurang. Ini menunujuk-kan bahwa masih ada mahasiswa yang belum mampu menginterpretasi masalah, menganalisis, mengevaluasi dan enarik kesimpulan dengan benar

Berdasarkan hasil wawancara dengan beberapa mahasiswa, tentang bahan ajar yang digunakan oleh dosen yaitu buku teks, diperoleh informasi bahwa mahasiswa masih kesulitan dalam memahami bahasa dan uraian pembahasan yang disajikan. Hal ini dikarenakan buku teks yang digunakan merupakan buku terjemahan, sehingga mahasiswa perlu pendampingan penuh dalam menggunakan bahan ajar tersebut. Selain itu, bahan ajar tersebut belum dapat memfasilitasi pembelajaran daring secara maksimal. Untuk itu, perlu adanya bahan ajar tambahan yang mendukung pembelajaran mahasiswa secara mandiri dan mengikuti perkembangan teknologi yang ada.

Menurut (Changwong et al., 2018) bahwa kemampuan berpikir kritis pada mahasiswa merupakan salah satu pilar utama baru berbasis pengetahuan yang sangat penting untuk ditingkatkan dalam pembelajaran. Salah satu caranya penggunaan bahan ajar yang sesuai kebutuhan mahasiwa. Bahan ajar yang mampu memfasilitasi mahasiswa mengembangkan kemapuan berpikir kritis perlu dikembangkan. Melalui bahan ajar tersebut mahasiswa terbiasa secara mandiri belajar untuk memecah-kan masalah dengan menganalisis argumen yang dimiliki untuk mendapat kesimpulan. Bahan ajar yang demikian adalah berupa modul. Modul merupakan bahan ajar yang dapat membantu mahasiswa belajar secara mandiri. Mahasiswa dapat membangun

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

sendiri pengetahuan secara aktif dalam proses pembelajaran dengan menggunakan modul (Anwar & Rahmawati, 2017).

Metode Socrates adalah proses pertanyaan yang menuntun mahasiswa dalam mengonstruksi pengetahuan dengan langkah-langkah secara terurut (Yunarti, 2016). Dengan menerapkan metode socrates dalam pembelajaran, mahasiswa dapat berpikir kritis serta dapat memikirkan langkah-langkah sederhana terlebih dahulu dalam menyelesaikan permasalahan, serta dapat membiasakan mahasiswa untuk memperoleh pengetahuan tanpa diberi tahu terlebih dahulu oleh dosen. Susunan pertanyaan Socrates yang diajukan dosen kepada mahasiswa pun mengikuti kaidah metode ilmiah. Oleh karena itu, metode Socrates dapat digolongkan sebagai salah satu metode yang berbasis pendekatan saintifik. Hasil penelitian (Ernawati & A Muhajir Nasir, 2018) disimpulkan bahwa penerapan metode socrates dapat meningkatkan hasil belajar matematika pada mahasiswa prodi pendidikan matematika. Berdasarkan informasi di atas menunjukkan bahwa bahan ajar berbasis Socrates dapat dijadikan alternative dalam meningkatkan kemampuan berpikir kritis mahasiswa.

Data hasil angket yang telah diisi 34 mahasiswa semester 4 Pendidikan Matematika dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil respon angket mahasiswa

No	Ya	Tidak
1	82,35%	17,65%
2	88,24%	11,76%
3	85,29%	14,71%
4	26,47%	73,53%
5	-	100%
6	-	100%
7	-	100%
8	-	100%
9	79,41%	20,59%
10	-	97,06%
11	-	76,47%
12	94,12%	5,88%
13	100%	-
14	94,12%	5,88%
15	100%	-

Respon mahasiswa terhadap kebutuhan bahan ajar aljabar linear, angket no 1 menunjukkan bahwa 82,35% mahasiswa telah memiliki buku teks aljabar linear. Ini berarti mayoritas mahasiswa sudah memiliki bahan ajar berupa buku teks. Namun, berdasarkan respon mahasiswa terhadap angket no 3 menunjukkan bahwa 85,29% mahasiswa mengalami kesulitan dalam memahami materi dalam buku teks yang digunakan. Mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengerjakan soal-soal aljabar linear karena belum terdapat bahan ajar yang dapat secara mandiri dipelajari oleh mahasiswa serta format yang kurang jelas, ada beberapa sub pokok yang memang materinya sangat sulit dicari oleh mahasiswa, walaupun sudah mencari ke beberapa referensi seperti dari internet ataupun buku yang ada. Mahasiswa memiliki buku teks hanya satu saja namun mahasiswa masih kesulitan dalam memahami tanpa dituntun dosen, mahasiswa tidak memiliki buku referensi lain sebagai alternatif yang dapat digunakan untuk mempelajari materi aljabar linear dapat dilihat pada soal angket nomor 12, mahasiswa sudah berusaha mencari sumber lain, tetapi mahasiswa belum menemukan yang mudah dipahami.

Menurut respon mahasiswa, dalam pembelajaran belum ada aplikasi bahan ajar yang memudahkan pembelajaran di dalam kelas yang dapat dilihat pada respon mahasiswa menjawab tidak sebanyak 100% pada soal angket nomor 5-8. Berdasarkan soal angket nomor 15 semua mahasiswa

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

setuju sebanyak 100% jika ada bahan ajar e-modul berbantu aplikasi android yang digunakan dalam pembelajaran aljabar linear. Selanjutnya berdasarkan wawancara terhadap mahasiswa sebagai lanjutan dari hasil respon mahasiswa diperole hasil bahwa mahasiswa membutuhkan bahan ajar yang memuat langkah-langkah terurut sebagai panduan untuk mengonstruksi pengetahuan secara mandiri. Berdasarkan hasil respon mahasiswa tersebut menunjukkan bahwa mahasiswa membutuhkan bahan ajar yang didalamnya memuat pertanyaan-pertanyaan yang mampu menuntun mahasiswa dalam membangun pengetahuan terkait aljabar linear secara mandiri. Selain itu, mahasiswa juga mengharapkan bahan ajar berbantu aplikasi android yang dapat dengan mudah digunakan dalam pembelajaran.

Berdasarkan Peraturan Rektor UM Metro No. 686/11.3.AU/ F/ Per/ UMM/ 2019 Pasal 9 ayat 4 yang menyatakan bahwa bahan ajar wajib diperbaiki mengikuti perkembangan teknologi. Perkembangan teknologi khususnya dalam program aplikasi saat ini memberikan kemudahan dalam pendidikan. Untuk itu, perlu dikombinasikan e-modul berbasis Socrates dengan teknologi yang berkembang. E-modul merupakan bentuk modul secara digital dan berisi materi dalam bentuk video dan animasi yang mampu membuat mahasiswa belajar lebih interaktif. sehingga capaian pembelajaran yang direncanakan dapat dicapai.

Menurut (Tania, 2017) proses pengembangan IT salah satunya yaitu dengan mengembangkan bahan ajar modul cetak menjadi modul elektronik atau e-Modul. Mahasiswa merasa senang mempelajari e-modul dibandingkan bahan ajar cetak karena didalamnya adanya fasilitas multimedia seperti gambar, animasi, video dan audio. Dengan adanya e-modul, mahasiswa dapat mengerjakan soal secara interaktif karena mahasiswa dapat melakukan evaluasi diri sendiri kapanpun dan dimanapun berapa terhadap suatu kompetensi serta berfungsi sebagai *multiplatform* yaitu dapat digunakan pada berbagai peralatan seperti laptop dan *handphone*. Salah satu aplikasi android yang dikembangkan yaitu *android mobile aplication*. Dari hasil (Holla & Katti, 2012) dapat terlihat bahwa di dunia teknologi yang berkembang pesat, android *Mobile* aplikasi adalah aplikasi yang berkembang pesat dari ponsel global pasar.

Aplikasi seluler berkembang dengan kecepatan meteor untuk memberi penggunanya pengalaman pengguna yang mudah dan cepat. Menurut (Perdana et al., 2017) untuk merancang dan mengembangkan modul elektronik dapat mengkolaborasikan keterampilan proses sehingga dapat diperoleh peningkatan keterampilan berpikir kritis. Berdasarkan hasil penelitian (Vahlia, 2017), agar mahasiswa dapat belajar secara mandiri dan beradaptasi dengan teknologi, *e-learning* diperlukan berdasarkan bahan ajar dimana dosen tidak harus membimbing siswa satu per satu, tetapi para mahasiswa juga dapat saling membantu dengan bantuan internet. Dari beberapa hasil penelitian tersebut, mengembangkan E-modul berbantu aplikasi android sangat penting dalam pembelajaran yang berlangsung tiga arah yaitu mahasiswa dengan sumber belajar, dosen mahasiswa dan sesama mahasiswa sendiri secara mandiri sehingga mempermudah dalam berinteraksi secara mandiri. E-modul berbantu aplikasi android merupakan

ISSN 2089-8703 (Print)
ISSN 2442-5419 (Online)

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

modul yang dikolaborasikan dengan system android berupa aplikasi yang mudah diakses mahasiswa dalam smartphone android.

Hasil penelitian (Herawati & Muhtadi, 2018), e-modul atau elektronik modul adalah modul dalam bentuk digital elektronik yang didalamnya terdapat teks, gambar maupun keduanya berisi materi disertai dengan simulasi sehingga dapat digunakan untuk mencapai tujuan pembelajaran. Sedangkan (Suarsana & Mahayukti, 2013) menyatakan bahwa penggunaan e-modul berorientasi pemecahan masalah, keterampilan berpikir kritis mahasiswa mengalami peningkatan. Hal ini sejalan dengan hasil penelitian ini, bahwa mahasiswa membutuhkan bahan ajar berupa e-modul untuk meningkatkan kemampuan berpikir kritis

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa perlu dikembangkan bahan ajar aljabar linear bagi mahasiswa pendidikan matematika. Salah satu alternatif bahan ajar yang dapat dikembangan berupa e-modul berbasis socrates berbantu aplikasi android.

Saran dalam penelitian ini perlu dilakukan penelitian lanjutan terkait pengembangan e-modul aljabar linear berbasis Socrates berbantu aplikasi android untuk meningkatkan ketrampilan berpikir kritis dan hasil belajar mahasiswa dan melihat efektifitas dari e-modul tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Aminah, S., & Radita, N. (2020). Pengembangan modul pembelajaran aljabar linier dan Matriks dengan pendekatan inkuiri untuk mahasiswa Teknik informatika. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *5*(2), 156-170.

Anwar, R. B., & Rahmawati, D. (2017). The use of mathematical module based on constructivism approach as media to implant the concept of algebra operation. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 579–583.

Changwong, K., Sukkamart, A., & Sisan, B. (2018). Critical thinking skill development: Analysis of a new learning management model for Thai high schools. *Journal of International Studies*, *11*(2), 11–12.

Dimas, A., Cari, C., Suparmi, A., Sarwanto, S., & Handhika, J. (2017). Profil Analisis Kebutuhan Bahan Ajar Mahasiswa Materi Dinamika Gerak pada Mata Kuliah Fisika Dasar. *Prosiding SNFA (Seminar Nasional Fisika Dan Aplikasinya)*, *1*, 42–45.

Ernawati, & A Muhajir Nasir. (2018). Efektivitas Metode Pembelajaran Socrates Kontekstual Berbasis Gaya Kognitif terhadap Hasil Belajar Statistik Dasar. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *1*(2), 31–44.

Firdaus, F., Kailani, I., Bakar, M. N. Bin, & Bakry, B. (2015). Developing Critical Thinking Skills of Students in Mathematics Learning. *Journal of Education and Learning (EduLearn)*, *9*(3), 226–236. https://doi.org/10.11591/edulearn.v9i3.1830

Hariyani, S., & Murniasih, T. R. (2019). Penyelesaian Soal Aljabar Linier Menggunakan Pendekatan Joint Action Studies. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *8*(3), 542-550.

DOI: https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i2.3671

Herawati, N. S., & Muhtadi, A. (2018). Pengembangan modul elektronik (e-modul) interaktif pada mata pelajaran Kimia kelas XI SMA. *Jurnal Inovasi Teknologi Pendidikan*, *5*(2), 180–191.

Holla, S., & Katti, M. M. (2012). Android based mobile application development and its security. *International Journal of Computer Trends and Technology*, *3*(3), 486–490.

Jamil, A. F. (2017). Peningkatan Level Berpikir Aljabar Siswa Berdasarkan Taksonomi SOLO Pada Materi Persamaan Linier Melalui Pemberian Scaffolding. *JIME*, *3*(1), 175-183.

Perdana, F. A., Sarwanto, S., Sukarmin, S., & Sujadi, I. (2017). Development of e-module combining science process skills and dynamics motion material to increasing critical thinking skills and improve student learning motivation senior high school. *International Journal of Science and Applied Science: Conference Series*, *1*(1), 45–54.

Sari, N. K., & Anantyarta, P. (2018). Pengembangan Petunjuk Praktikum Histologi Program Studi Pendidikan Biologi. *BIOMA: Jurnal Biologi Dan Pembelajaran Biologi*, *3*(2).

Sinaga, C. V. R., & Sijabat, A. (2020). Pengembangan Materi Aljabar Linier dengan Model Problem Based Learning dalam Upaya Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa SMP. *MAJU: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *7*(2), 171-177

Suarsana, I. M., & Mahayukti, G. A. (2013). Pengembangan E-Modul Berorientasi Pemecahan Masalah Untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis Mahasiswa. *Jurnal Nasional Pendidikan Teknik Informatika (JANAPATI)*, *2*(3), 193. https://doi.org/10.23887/janapati.v2i3.9800

Tania, L. (2017). pengembangan bahan ajar e-modul sebagai pendukung pembelajaran kurikulum 2013 pada materi ayat jurnal penyesuaian perusahaan jasa siswa kelas x akuntansi smk negeri 1 surabaya. *Jurnal Pendidikan Akuntansi (JPAK)*, *5*(2).

Vahlia, I. dan R. E. (2017). Pengembangan Bahan Ajar Berbasis E Learning Pada Matakuliah Evaluasi Pembelajaran Untuk Meningkatkan Hasil Belajar Mahasiswa. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *6*(2), 169. https://doi.org/10.24127/ajpm.v6i2.1038

Yunarti, T. (2016). *Metode Socrates Dalam Pembelajaran Berpikir Kritis*. Graha Ilmu.

Dokumen pendukung luaran Tambahan #2

Luaran dijanjikan: Artikel di jurnal internasional

Target: Accepted
Dicapai: Sedang direview

Dokumen wajib diunggah:
1. Naskah artikel
2. Bukti sedang direview

Dokumen sudah diunggah:
1. Naskah artikel
2. Bukti sedang direview

Dokumen belum diunggah:
-

VALIDITY ANALYSIS OF DEVELOPMENT OF SOCRATES-BASED LINEAR ALJEBRA E MODUL

ABSTRACT

The aim of the study was to investigate the validity level of Socrates-based linear algebra modules, both material validity and design. This is a research and *development* (R&D) with ADDIE procedure: *analysis, design, develop, implement, and evaluate. The participants were* 30 students and 2 lecturers who supervised linear algebra courses in the mathematics education study program of Universitas Muhammadiyah Metro. Data collection techniques uses questionnaires provided to material and design validators. Data analysis uses quantitative descriptive. The results showed that the validity rate of Socrates-based linear algebra e-modules on material aspects was 81.33% with highly valid categories and on design aspects 88% with highly valid categories. Based on the results of the study obtained the conclusion that the e-module algebra linear based on Socrates is declared very valid. Furthermore, further research can be conducted related to the use of Socrates-based linear algebra e-module.

Keywords: e-module; socrates, validity

INTRODUCTION

The rapid development of technology and information and the covid-19 outbreak affect various aspects of life. One of them affects education where there are learning activities. This situation requires educators to have a role in learning to quickly follow the ongoing developments. One of the efforts to improve the quality of learning is the use of teaching materials that meet the students' needs. Some experts (Dimas, 2017; Prastowo, 2014) state that teaching materials are all forms of materials that are systematically arranged to facilitate the learning process and to achieve the graduates' learning outcomes that has been determined. The same thing is also stated by (Gazali, 2016; Nisrokha, 2015) that teaching materials can improve the quality of learning.

Based on the results of observations of linear algebra learning, it was obtained information that students had difficulty in understanding and solving problems independently. The teaching materials that the students had was still very limited to a printed book where students had difficulty in learning the book without the help of lecturers during the current pandemic. Theories have suggested that the use of appropriate teaching materials determines the quality of learning (Perwitasari & Wahjoedi, 2018). The research analysis of the needs of teaching materials has been done by (Vahlia et al., 2021) to answer that condition, the results of the study showed that it was necessary to develop linear algebra teaching materials that meet the students' characteristics and existing technological developments to facilitate their learning during pandemic times. In the current pandemic, students urgently need teaching materials that are easy to understand and can be used independently. It is believed that the teaching material can lead students to construct their knowledge through questions and steps arranged in sequence from the simplest things, to facilitate online learning today.

Pandemic circumstances and technological developments demand a digital-based learning. It is also supported by the situation in the field where almost all students have already been using android. To that end, one of the teaching materials that can be developed and integrated with technology is linear algebra e-modules to facilitate students to study independently. (Ekayanti, 2017; Lestari & As'ari, 2013) state that modules are teaching materials that are systematically arranged with clear learning criteria to facilitate students to learn independently. (Anwar & Rahmawati, 2017) also state that the use of constructivism based mathematics module was very effective in improving students' mathematical understanding on algebra operation material. Thus, e-modules or electronic modules are digitally a form of modules and contain the most directed material in the form of sound impressions, graphics, images, videos, and animations. These e-modules can facilitate students to learn more interactively and independently so that the planned learning achievements can be achieved. Mobile learning is an essential tool to help make sense of mathematics (Johnson & Williams, 2020). The development of this e-module is very necessary because through this e-module students can easily study anywhere and anytime independently. Learning requires interactive and interesting innovations to increase student motivation in learning (Maskur et al., 2017; Sagala et al., 2019).

In addition to modules must accommodate the development of technology in the form of e-modules, and modules must also adapt the characteristics and needs of students. E-modules must be developed according to the learning criteria clearly and coherently (Sipayung & Simanjuntak, 2017). Socrates is a method of learning in which there is an activity of giving questions that lead students in constructing knowledge with steps in order (Yunarti, 2016). Through the Socrates method applied in the e-module of learning, students can think of simple steps first in constructing knowledge and solving their problems. The questions in the e-module are arranged to follow scientific rules. Therefore, the Socrates method can be classified as one of the methods based on scientific approaches. Prior study (Ernawati & A Muhajir Nasir, 2018) concluded that the application of Socrates method could improve mathematics in students of mathematics education study program.

Based on the results of needs analysis research (Vahlia et al., 2021) and literature review, it is found that there has not been a development of Socrates-based linear algebra e-modules, therefore, sub-sequent research was carried out related to the development of Socrates-based linear algebra e-modules. One of the stages of e-module development is to validate each component in the e-module (Sukiminiandari et al., 2015), with the aim of producing a Socrates-based linear algebra of e-module that is feasible to use in learning.

METHOD

This research is an R&D development research. The development model used is ADDE through the stages of *Analysis, Design, Develop, Implement and Evaluation.* (Aldoobie, 2015; Branch, 2009). The analysis stage processes the importance of the development of e-modules in linear algebra learning covering *analysis of problems* in learning, analysis of *students' characteristics* in learning and *analysis of learning materials* and *learning objectives*. The design stage includes the design of e-modules to accommodate a conceptual framework of e-modules. This design activity consists of studying learning achievements to determine educational materials, designing Socrates-based e-module scenarios, designing e-module materials and designing e-module evaluation questions.

The development stage is an activity as an embodiment of the conceptual framework at the design stage. The made conceptual framework is implemented in the form of Socrates-based e-modules. Besides, this stage also arranges a validation of e-modules to obtain e-modules that are worth using. The evaluation stage provides feedback on the compiled e-modules which are further revised. The evaluation stage is done in each stage that has been done.

The subjects of this study are 30 students and 2 lecturers who supervise linear algebra courses in the mathematics education study program of Universitas Muhammadiyah Metro. In addition, the study also involved 6 validators: material validators and e-module design validators. Data collection instruments employ the form of questionnaires and interviews. Questionnaire consists of students' and lecturers' response questionnaires, material validation, and design validation questionnaires. Data analysis techniques consist of qualitative and quantitative data. The data that has been obtained is further analysed using the Likert scale to present descriptively.

RESULT AND DISCUSSION

First letter of each word in Heading 2 is Uppercase The results of this development research are in the form of a product called Socrates-based linear algebra e-module. Socrates-based linear algebra e-modules are electronic modules that lead students to understand the concept of linear algebra. The e-module is designed to guide students in understanding the concept of linear algebra through organized questions to stimulate students' thinking starting from simple steps in constructing knowledge and resolving problems without being told in advance by lecturers.

The designed Socrates-based linear algebra e-modules is further validated by three materials experts and three design experts using the provided instruments. Validation of the material is performed by three lecturers of mathematics education who had more than ten years of teaching and research experience. While design validation is completed by three lecturers who had teaching experience and technology-based learning research. The material validation instrument consists of nine assessment indicators; *content accuracy, self-instruction, self-contained, stand alone, adaptive, user friendly, face, language use, Socrates characteristics*. While the design validation instrument consists of seven assessment indicators: *format, organization, attractiveness, shape and size of letters, space or blank spaces, consistency and supporting quality*. Data validation of both material and design validation are assessment scores, comments and suggestions related to Socrates-based linear algebra e-modules. Material validation aims to assess the content of Socrates-based algebra linear e-module material before being use in student learning. Validation data from three material experts is presented in table 1 as follows:

Table 1 Product Validation Results Data by Material Experts

Validator	Number of Scores	Percentage	Category
V_{m1}	60	80,00%	Valid
V_{m2}	62	82,67%	highly Valid
V_{m3}	61	81,33%	highly Valid
Average		81,33%	highly Valid

Information:
V_{m1} : material validator expert 1
$V_{m2:}$: material validator expert 1
$V_{m3:}$: material validator expert 1

The data of material validation results in Table 1 shows that the material validator expert 1 grades the validation assessments with 80.00% as valid category. Validator-2 rates the validation assessments with 82.67% as highly valid category. Validator-3 scores the validation assessments with 81.33% as highly valid category. The average assessment of the three material validators is 81.33% and is in the category of highly valid. The validators also provide comments and related suggestions for e-module. The comments and suggestions from all three expert material validators are presented in Table 2 as follows:

Table 2. Material Expert Comments and Suggestions

Validator	**Comments and suggestions**
Vm_1	the exercise section is good, but the examples of problems need adding so that readers understand more to do the exercises.
	The display of the material is good, but it needs additional views to make readers more interested.
Vm_2	All definitions and theorems should use numbering as a name and exercise.
	You need to give examples of problems and solutions.
	It should be given a limited example in the form of how to answer some questions.
	All definitions on the module should be numbered to make them easier for students refer and to which definitions are used in proofing
Vm_3	the material map section should contain a concept map only, to be more meaningful.
	In general, this module is good in typing and writing equations, exercises and tasks, and the language with a detail explanation.

Table 2 shows that the exercises on the module are well and complete because a variety of possible problems is provided. What needs improving includes the additional of problem examples and their completion to make students can more easily understand the materials independently to meet the function of the module or is called self-instruction. The provided materials in the module meet the learning achievements of linear algebra courses but the appearance of the material needs improving to make students more interested in learning. In addition, it is also necessary to improve the numbering of all definitions and explanations of the meaning of each definition to make students easy when referring to the definition in solving their problems. Lastly, the material map section should contain a concept map to be more meaningful for users or students. The conclusion of the expert's assessment of material validators indicate that the module is worth using after being revised.

Media validation aims to assess the design of the Algebra Linear e-module application before students use it. A Socrates-based linear algebra e-module can be directly downloaded by a validator for assessment. The result of media validation is presented in full in table 3 below:

Table 3 Media Expert Validation Results

No	**Validator**	**Total Score**	**Percentage**	**Category**
1	V_{d1}	**48**	**96%**	**Very valid**
2	V_{d2}	**45**	**90%**	**Very valid**
3	V_{d3}	**39**	**78%**	**Valid**
		Average	88%	**Very valid**

Information:

V_{d1}: design validator expert 1
V_{d2}: design validator expert 2
V_{d3}: design validator expert 3

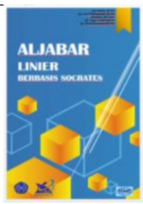
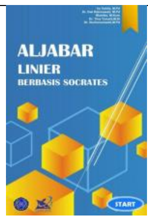
Table 5 shows that the assessment by the design validator-1 is 96% which means highly valid category. Validator design-2 grades 90% which means highly valid category. Validator design-3 scores 78% which means valid category. The average design validation resulted from the three validators is 88% which belongs to highly valid category. It is concluded that the results of the assessment of the three design expert validators on the e-module is very valid and can already be used after revision. Although the assessment of the category is very valid, the application of linear algebra e-modules still requires improvement in some parts to meet the suggestions and comments given by validators. The suggestions and comments provided by the three design validators are presented in Table 4:

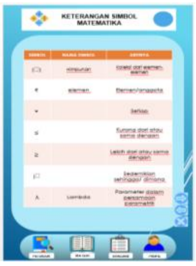
Table 4 Media Expert Advice and Comments

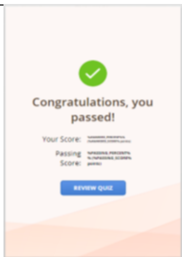
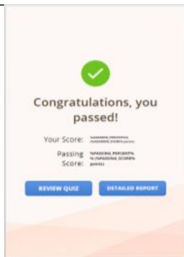
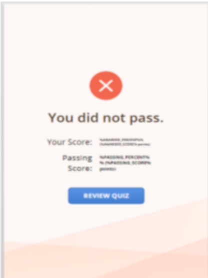
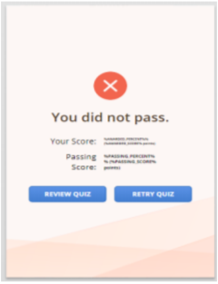
Validator	Saran dan Komentar
V_{d1}	The app is very interesting and useful.
	Paragraphs can be more corrected, but overall, it is appropriate.
	Font on customized image (scaled down)
	App functionality is appropriate
	Very bright and attractive colours
V_{d2}	*In the cover is written* "developer team." It should be replaced with bright colours (white) so that more button "starts" and should use a type of icon (png) with transparent *background.*
	There are six boxes of *material buttons* in the introduction that may provoke users to choose one, but the six boxes of material do not have a link. For that reason, it is good to use the menu *list* only instead of the material boxes.
	The app does not have *mute* sound option. The design *of the single sound icon* should work for *sound-on* and *sound-off* and there should be button "*next, previous* and *exit" and* please use transparent *background for them.*
	In the *evaluation menu* should be provided options "*reset*" for users to retry the provided quiz and at the end section there should be a button "passing *score."*
	Validators recommend that the *layout* application is made vertical by ensuring the *auto rotate* function because the auto *rotate horizontal* display design will become smaller and is difficult to read.
V_{d3}	Please notes the use of this module should meet the appropriate application and tested in various OS which is commonly used by students such as android in various versions.
	The display of definition should appear *step by step,* based on the being described materials.
	Regarding the contents on quiz, it is good to be multiple choice.

Considering comments and suggestions from both material and design validators, the Socrates-based linear of algebra-modules are to revise as final product version and the results are presented in table 5 below:

Table 5 Revised Results of Linear Algebra E-Module Applications

No	Before the revision	After revision
1.		

No	Before the revision	After revision
	On *the cover* there is a black text colour which is not clearly visible. The start button is also the colour combination which is blur.	On the colour cover the text is changed to white so that it is clearly visible, and the start button of the colour combination is fixed
2.		
	The material box at the beginning of the application allows users to click on the box, although there is not any link. Spaces in paragraphs are still too short and the distance between words are jumbled. There is not any animation yet in the application to make it more attractive for students.	The omitted material box is converted into a list of materials so that it is not clicked by the users. Spaces in paragraphs are changed from one space to double so that it looks neater. Animation is inserted in the application so that it looks more attractive. In some parts there is also animation.
3.		
	Layout is further arranged between menus and sub menus to avoid confusion among users.	The arrow of layout has been changed and no longer confuses users.
4.		
	Use of one space is too tight	Use of spaces is changed to 1.5
5.		
	There is not any description of the mathematical symbol.	There is already a description of the mathematical symbol.

No	Before the revision	After revision
6	 There is not any detailed report menu to make the assessment explanation can be more detailed.	 Improvement of the quiz menu is made. When passing the passing score there is a detailed report menu enabling the assessment explanation to be more detailed
7	 When you do not pass *the passing score* there is not any *menu "retry quiz"* to repeat the work of the quiz.	 Menu improvement quiz is made. When users do not pass the passing score, there is a retry quiz menu to repeat the quiz work.

E-module is one of the teaching materials that can help students in the learning. (Sari & Anantyarta, 2018) states that one of the factors that affect the ability of students to teach materials is e-module. Socrates-based linear algebra e-modules were developed to facilitate students' learning linear algebra courses both independently and in the assistance of lecturers. The developed e-module based on Socrates is an e-module containing questions that lead students in constructing knowledge. The questions are arranged in order starting from a simple model to a more complex one. Thus, it can train students to hone thinking skills in solving problems.

The results of validation of e-module materials show that Socrates-based linear algebra e-modules are very valid and still need revising. The revision of the e-module is done by adding examples and numbering definitions and explanations so that the students can understand the materials independently. This result is confirmed with the statement of (Nafsiah & Rizal, 2019) stating that e-modules are teaching materials used to help students learn independently based on learning achievements.

Validation of e-module design shows that the e-module is highly valid despite some revisions. The design expert validator provides suggestions to improve e-modules related to the appearance: the use of letter colours, spaces, and menus. This is to make students more interested in using it. E-module design is designed well to make students can easily use it and meet the criteria of user friendly. Similarly stated by (Ariyanto et al., 2018; Oktaviana et al., 2015) who state that well-designed teaching materials motivate students to study well.

CONCLUSION

Considering the results of the development of the Socrates-based linear algebra e-module, the authors concluded that the e-module is declared highly valid seen from both the material and design aspects indicated by an average value of 84.67 ratings. Furthermore, the development of Socrates-based linear algebra e-modules can be continued to the implementation stage or use of e-modules in learning.

REFERENCES

Aldoobie, N. (2015). ADDIE model. *American International Journal of Contemporary Research*, *5*(6), 68–72.

Anwar, R. B., & Rahmawati, D. (2017). The use of mathematical module based on constructivism approach as media to implant the concept of algebra operation. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 579–583.

Ariyanto, A., Priyayi, D. F., & Dewi, L. (2018). Penggunaan media pembelajaran biologi di sekolah menengah atas (sma) swasta salatiga. *BIOEDUKASI (Jurnal Pendidikan Biologi)*, *9*(1), 1–13.

Branch, R. M. (2009). *Instructional design: The ADDIE approach* (Vol. 722). Springer Science & Business Media.

Ekayanti, A. (2017). PENGEMBANGAN MODUL IRISAN KERUCUT BERBANTUAN GEOGEBRA. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *6*(3), 308–314.

Ernawati, & A Muhajir Nasir. (2018). Efektivitas Metode Pembelajaran Socrates Kontekstual Berbasis Gaya Kognitif terhadap Hasil Belajar Statistik Dasar. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *1*(2), 31–44.

Gazali, R. Y. (2016). Pengembangan bahan ajar matematika untuk siswa SMP berdasarkan teori belajar ausubel. *Pythagoras: Jurnal Pendidikan Matematika*, *11*(2), 183–184.

Johnson, J. D., & Williams, C. (2020). Mobile Learning Features Preferred: An Examination of Students in the United Arab Emirates. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*, em0596.

Lestari, E., & As'ari, A. R. (2013). Pengembangan Modul Pembelajaran Soal Cerita Matematika Kontekstual Berbahasa Inggris Untuk Siswa Kelas X. *Malang: Universitas Negeri Malang*.

Maskur, R., Nofrizal, N., & Syazali, M. (2017). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika dengan Macromedia Flash. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, *8*(2), 177–186.

Nafsiah, I. N., & Rizal, F. (n.d.). VALIDITAS PENGEMBANGAN MODUL PEMBELAJARAN PROJECT BASED LEARNING PADA MATA KULIAH MANAJEMEN PROYEK DI PENDIDIKAN TEKNIK BANGUNAN FT-UNP. *Educational Building Jurnal Pendidikan Teknik Bangunan Dan Sipil*, *5*(1JUNI), 26–31.

Nisrokha, N. (2015). Teknik Mengembangkan Modul Mata Kuliah Sejarah Pendidikan Islam. *Madaniyah*, *5*(2), 296–308.

Oktaviana, I., Sumitro, S. B., & Lestari, U. (2015). Pengembangan Bahan Ajar Berbasis Penelitian Karakterisasi Protein Membran Sperma pada Matakuliah Bioteknologi. *Florea: Jurnal Biologi Dan Pembelajarannya*, *2*(2).

Perwitasari, S., & Wahjoedi, W. (2018). Pengembangan Bahan Ajar Tematik Berbasis Kontekstual. *Jurnal Pendidikan: Teori, Penelitian, Dan Pengembangan*, *3*(3), 278–285.

Sagala, R., Umam, R., Thahir, A., Saregar, A., & Wardani, I. (2019). The Effectiveness of STEM-Based on

Gender Differences: The Impact of Physics Concept Understanding. *European Journal of Educational Research*, *8*(3), 753–761.

Sari, N. K., & Anantyarta, P. (2018). Pengembangan Petunjuk Praktikum Histologi Program Studi Pendidikan Biologi. *BIOMA: Jurnal Biologi Dan Pembelajaran Biologi*, *3*(2).

Sipayung, T. N., & Simanjuntak, S. D. (2017). Efektivitas Pembelajaran Kooperatif Dengan Menggunakan Modul. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *6*(3), 393–398.

Sukiminiandari, Y. P., Budi, A. S., & Supriyati, Y. (2015). Pengembangan modul pembelajaran fisika denganpendekatan saintifik. *Prosiding Seminar Nasional Fisika (e-Journal)*, *4*, SNF2015-II.

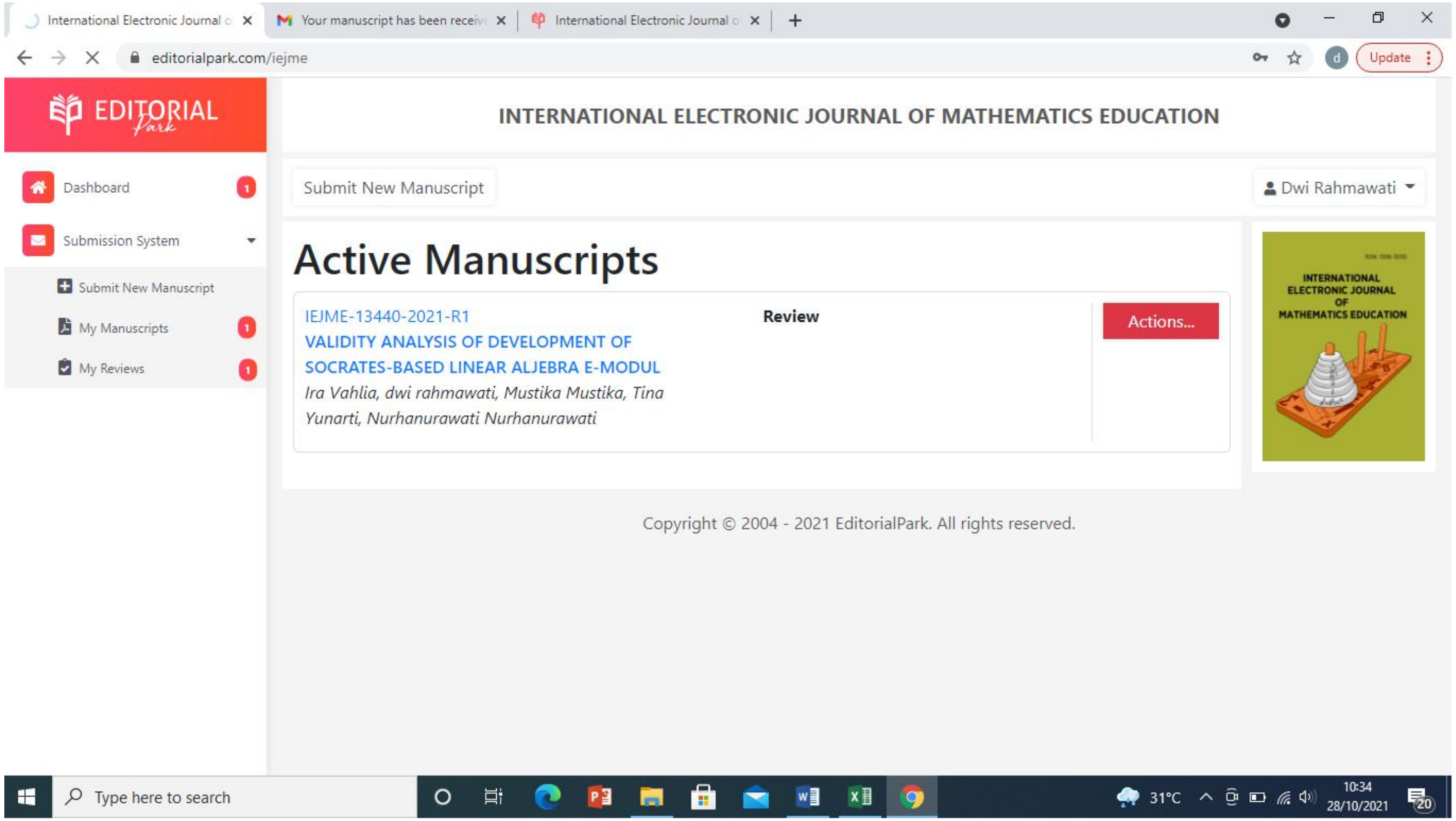
Vahlia, I., Rahmawati, D., Mustika, M., Yunarti, T., & Nurhanurawati, N. (2021). ANALISIS KEBUTUHAN PENGEMBANGAN BAHAN AJAR ALJABAR LINEAR BAGI MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *10*(2), 1182–1189.

Yunarti, T. (2016). *Metode Socrates Dalam Pembelajaran Berpikir Kritis*. Graha Ilmu.

BUKTI RIVIEW JURNAL INTERNASIONAL

International Electronic Journal of Mathematics Education

https://www.iejme.com



Dokumen pendukung luaran Tambahan #3

Luaran dijanjikan: Buku Ajar

Target: Terbit ber ISBN
Dicapai: Terbit

Dokumen wajib diunggah:
1.

Dokumen sudah diunggah:
1.
Surat keterangan terbit dari penerbit dengan menyebutkan jumlah eksemplar yang dice
tak

Dokumen belum diunggah:
-

Nama : IRA VAHLIA
TTL : Metro, 6 Desember 1989
Alamat : Jl Tiram 21 Yosodadi Metro Timur
Email : iravahlia56@gmail.com
Riwayat Pendidikan:
S1 Pend. Matematika Universitas Muhammadiyah Metro
S2 pend. Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta

Nama : DWI RAHMAWATI
TTL : Sukoharjo, 10 April 1983
Alamat : Dusun III RT/RW 011/005
Email : dwirahmawati1083@gmail.com
Riwayat Pendidikan:
S1 Pend. Matematika Univ. Sebelas Maret Surakarta
S2 Pend. Matematika Univ. Sebelas Maret Surakarta
S3 Pend. Matematika Universitas Negeri Malang

Nama : MUSTIKA
TTL : Palembang, 4 Maret 1983
Alamat : Jl R.Imba Kusuma No. 29 Metro Pusat
Email : mustika@ummetro.ac.id
Riwayat Pendidikan:
S1 Sistem Informatika (STMIK Palcomtech)
S2 *Software Enginnering* (Universitas Bina Darma)

Nama : TINA YUNARTI
TTL : Tanjung Karang, 10 Juni 1966
Alamat : Jalan Bumi Manti III No. 80, Kampung Barlabuhan Ratu, Bandar Lampung
Email : tina_yunarti@yahoo.com
Riwayat Pendidikan:
S1 Pend. Matematika FKIP Universitas Lampung
S2 pend. Matematika Universitas Gadjah Mada
S3 Pend, Matematika Universitas Pendidikan Indonesia

Nama : NURHANURAWATI
TTL : Kotabumi, 8 Agustus 1967
Alamat : Jl. Durian II No. 24 Kel. Waydadi Kec. Sukarame, Bandar Lampung
Email : nurhanurawati94@gmail.com
Riwayat Pendidikan:
S1 Pend. Matematika Universitas Lampung
S2 Pend. Matematika Universitas Negeri Malang
S3 Pend. Matematika Universitas Negeri Malang

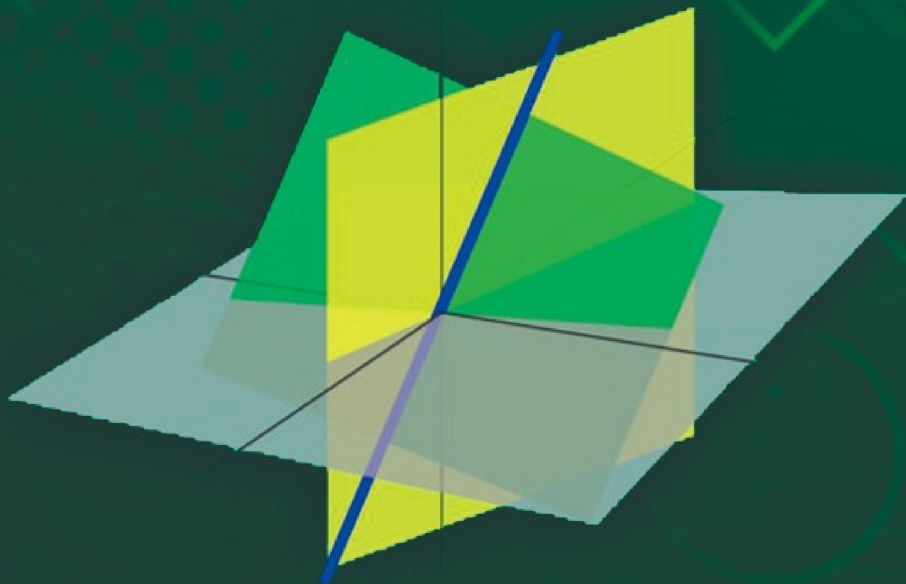
ISBN 978-623-90328-8-3

ISBN 978-623-90328-8-3

Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Si.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

Buku Ajar ALJABAR LINIER

(Meningkatkan Keterampilan Berfikir Kritis)



Penerbit :
Lembaga Penelitian UM Metro
2021

Buku Ajar
Aljabar Linear

(Meningkatkan Keterampilan Berfikir Kritis)

Penulis:

Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Pd.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

Penerbit :
Lembaga Penelitian UM Metro
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 116 Metro
Kecamatan Metro Timur
Kota Metro, 34111
Telp/Fax (0725) 47922
Email: lemlitummetro@gmail.com
Website: www.lppm.ummetro.ac.id

Buku Ajar Aljabar Linear
(Meningkatkan Keterampilan Berfikir Kritis)

Penulis:
Ira Vahlia, M.Pd.
Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
Mustika, M.Kom.
Dr. Tina Yunarti, M.Pd.
Dr. Nurhanurawati, M.Pd.

ISBN : 978-623-90328-8-3

Editor :
Dr. Sudarman, M.Pd.
Dr. Sutrisni Andayani
Dr. Rahmad Bustanul Anwar, M.Pd.

Penyunting :
Dr. Achyani, M.Si.

Desain Sampul dan Tata Letak :
Irfan Iqbal, S.E., M.M.

Penerbit
Lembaga Penelitian UM Metro

Redaksi:
Lembaga Penelitian UM Metro Press
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 116 Metro
Kecamatan Metro Timur
Kota Metro, 34111
Telp/Fax (0725) 47922
Email: lemlitummetro@gmail.com
Website: www.lppm.ummetro.ac.id

Cetakan Pertama, Oktober 2021

KATA PENGANTAR

Buku ini ditujukan untuk mahasiswa dan dosen yang ingin mengetahui materi Aljabar Linear. Buku ini ditulis dalam lima bab yang berisi materi berbasis socrates, indikator serta latihan mahasiswa secara mandiri. Melalui buku ini diharapkan dosen dan mahasiswa dapat mengembangkan kemampuan berpikir kritis dan kemampuan menganalisis, mengevaluasi serta menginterpretasi masalah-masalah yang disajikan, sehingga nantinya mahasiswa tidak hanya terpaku pada materi Aljabar Linear.

Penulis berharap buku ini dapat terus berkembang dan disempurnakan sesuai dengan tuntunan kebutuhan para pengguna. Usaha penulis pun terus dilakukan untuk membangkitkan minat para dosen dalam membuat bahan ajar inovatif dengan mengintegrasikan indikator kemampuan berpikir kritis sehingga mahasiswa dapat memiliki kemampuan bertanya dan menjawab yang dapat menghasilkan suatu kesimpulan melalui proses yang bermakna terlebih dahulu. Proses yang menyenangkan dan manfaat mempelajari buku ini sangat berharga dan dapat menjadi umpan balik yang tak ternilai bagi penulis maupun pembaca. Tidak lupa penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Kemenristek-Dikti yang telah mendanai penelitian lewat Hibah Penelitian Kerjasama Antar Perguruan Tinggi (PKPT) yang telah mendanai, sehingga tersusun Buku Hasil Penelitian ini.
2. Para dosen yang menjadi Validator dalam buku ini sehingga dapat digunakan oleh mahasiswa pendidikan matematika
3. Para mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Metro yang terlibat dalam penelitian dan penyusunan buku ini
4. Semua pihak yang telah membantu kelancaran penelitian dan penulisan buku ini

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam penulisan buku ini, untuk itu saran dan masukan yang membangun demi perbaikan buku ini sangat penulis nantikan.

Metro, September 2021

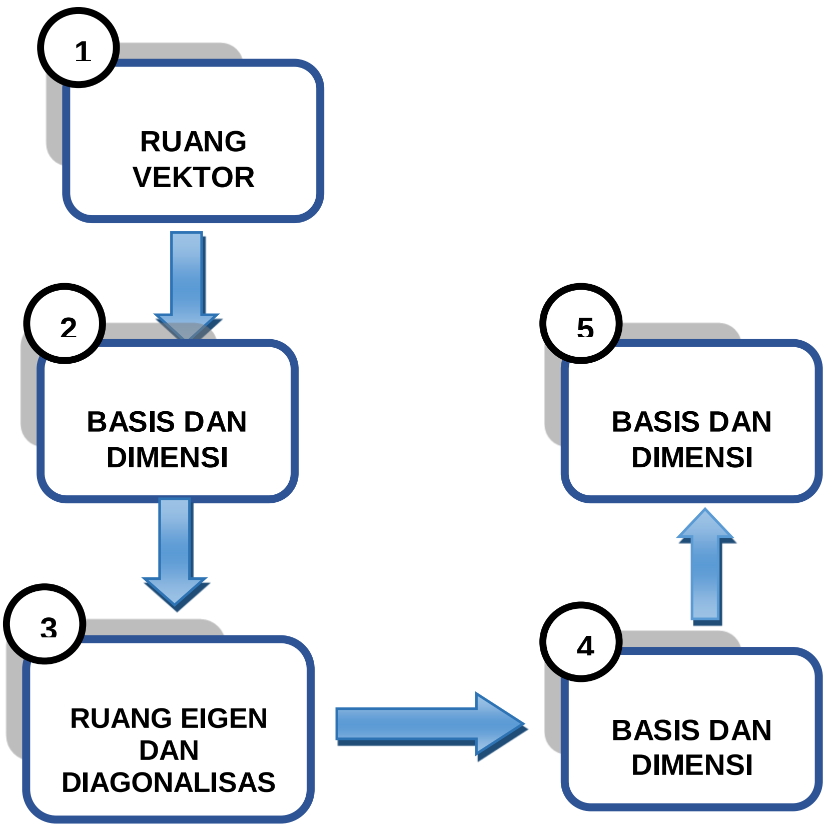
Penulis

DAAR ISI

PETA KONSEP

MATERI

PENDAHULUAN



KETERANGAN SIMBOL MATEMATIKA

SIMBOL	NAMA SIMBOL	ARTINYA
{ }	Himpunan	Koleksi dari elemen-elemen
∈	Elemen	Elemen/anggota
∀		Setiap
≤		Kurang dari satu atau sama dengan
≥		Lebih dari satu atau sama dengan
|		Sedemikian sehingga/ dimana
λ	Lambda	Parameter dalam persamaan parametik

BAB 1 RUANG VEKTOR

A. Ruang-n Euclides

Pada saat pertama kali ilmu vektor dikembangkan , hanya dikenal vektor – vektor di R^2 dan R^3 saja, tetapi dalam perkembangannya ternyata di dapatkan permasalahan yang lebih kompleks sehingga dikembangkan vektor – vektor di ruang berdimensi 4,5 atau secara umum merupakan vektor – vektor di R^n. Secara geometris memang vektor – vektor di R^4 dan seterusnya memang belum bisa digambarkan, tetapi dasar yang digunakan seperti operasi – operasi vektor masih sama seperti operasi pada vektor – vektor di R^2 dan R^3. Orang yang pertama kali mempelajari vektor – vektor di R^n adalah Euclidis sehingga vektor – vektor yang berada di R^n dikenal sebagai vektor Euclidis, sedangkan ruang vektornya disebut ruang –n Euclidis.

Suatu ruang vektor X atas $\mathbb{K}$ adalah suatu himpunan X yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan

$$\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}}\,, \boldsymbol{u}\,, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$$

dan perkalian dengan skalar

$$\alpha u,\ \alpha \in \mathbb{K},\ u \in X$$

Operasi standar / baku pada vektor Euclidis

Diketahui $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah vektor – vektor di ruang –n Euclidis dengan $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, \mathrm{un})$ dan $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, \mathrm{vn})$

Penjumlahan vektor

$$\overline{u} + \overline{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$$

Mari kita lihat
contoh dibawah ini

Contoh 1.1

Diketahui : $\overline{a} = (3,4,5)$, $\overline{b} = (2,1,8)$ dan $\overline{c} = (1,7,4)$

Tentukan $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$!

Jawab: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (3,4,5) + (2,1,8) + (1,7,4)$

$= (3 + 2 + 1,\ 4 + 1 + 7,\ 5 + 8 + 4)$

$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (6,\ 12,\ 17)$

Perkalian titik

$$\overline{u} . \overline{v} = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + ... + u_n.v_n)$$

Mari kita lihat
contoh dibawah ini

Contoh 1.2

Diketahui : $\overline{a} = (1, 3, -2)$, $\overline{b} = (4, -2, 4)$

Tentukan $\overline{a} . \overline{b}$

Jawab: $\overline{a} . \overline{b} = (1, 3, -2) . (4, -2, 4)$

$= (1)(4) + (3)(-2) + (-2)(4)$

$\overline{a} . \overline{b} = (6,\ 12,\ 17)$

Perkalian dengan skalar

k $\overline{u}$ = (ku_1, ku_2 , . .., ku_n)

Mari kita lihat contoh dibawah ini

Contoh 1.3

Diketahui : $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tentukan $4\overline{a}$!

Jawab: $4\overline{a} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Panjang vektor

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}\| = (\overline{\boldsymbol{u}}.\overline{\boldsymbol{u}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\boldsymbol{u_1}^2 + \boldsymbol{u_2}^2 + \cdots + \boldsymbol{u_n}^2}$$

Mari kita lihat contoh dibawah ini

Contoh 1.4

Diketahui : $\overline{u} = (2{,}4)$

Tentukan : $|\overline{\boldsymbol{u}}|$

Jawab: $|\overline{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{2^2 + 4^2}$

$|\overline{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

Jarak antara vektor

$$\mathbf{d}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u} - \bar{v}\ .\ \bar{u} - \bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Mari kita lihat contoh dibawah ini

Contoh 1.5

Diketahui $\overline{a} = (1,1,2,3)\ dan\ \overline{b} = (2,2,1,1)$

Tentukan jarak antara $\overline{a}\ dan\ \overline{b}$!

Jawab :

$$\overline{a} - \overline{b} = (-1,-1,1,2)$$

$$d(\overline{a}\,,\overline{b}) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = 7$$

B. Ruang Vektor

Ruang vektor merupakan struktur matematika yang terbentuk oleh sekumpulan vektor dengan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian skalar serta memenuhi beberapa aksioma.

Selama ini kita telah membahas vektor – vektor di R^n Euclides dengan operasi – operasi standarnya. Sekarang akan membuat konsep tentang ruang vektor dengan konsep yang lebih luas.

Syarat V Disebut Ruang Vektor

Andaikan V sebarang himpunan tak kosong. V dapat dinyatakan sebagai ruang vektor jika dua operasi yang didefinisikan memenuhi 10 sifat berikut, yaitu :

1. Jika vektor – vektor $\overline{u}$, $\overline{v}$∈ V , maka vektor $\overline{u}+\overline{v}\in V$
2. $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$
3. $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})$
4. Ada $e\in V$ sehingga $e+\overline{u}=\overline{u}+e$ untuk semua$\overline{u}$, $e\in V$, e : vektor nol
5. Untuk setiap $\overline{u}\in V$ terdapat $-\overline{u}\in V$ sehingga $\overline{u}+(-\overline{u})=(-\overline{u})+\overline{u}=\overline{0}$
6. Untuk sembarang skalar k , jika $\overline{u}$∈ V maka k$\overline{u}$∈ V
7. $k(\overline{u}+\overline{v})=k\overline{u}+k\overline{v}$, k sembarang skalar
8. (k + l) $\overline{u}$ = k $\overline{u}$ + l $\overline{u}$, k dan l skalar
9. k(l $\overline{u}$) = (kl) $\overline{u}$
10. 1 $\overline{u}$ = $\overline{u}$

Dalam hal ini, diketahui bahwa elemen identitas dalam matematika disebut juga elemen netral karena memiliki tipe khusus yakni elemen suatu himpunan sehubungan dengan operasi biner (*) pada himpunan itu, yang membiarkan setiap elemen dari himpunan tidak berubah saat dilakukan operasi dengannya. Elemen identitas yang berhubungan dengan penjumlahan disebut identitas aditif (sering dilambangkan sebagai 0, contoh : $u+0=0+u=0$) dan identitas yang berhubungan dengan perkalian disebut identitas perkalian (sering dilambnagkan sebagai 1, contoh: 1 $\overline{u}$ = $\overline{u}$). Selain itu, terdapat elemen invers, dimana untuk setiap $\overline{u}\in V$ terdapat $-\overline{u}\in V$ sehingga $\overline{u}+(-\overline{u})=(-\overline{u})+\overline{u}=\overline{0}$. Kemudian operasi antara identitas perkalian dengan skalar adalah hasil kali suatu skalar k dengan sebuat elemen identitas 1, sehingga dapat dituliskan k(1). Sehingga hasilnya tetap menghasilkan bilangan skalar itu sendiri.

Dalam hal ini tentunya yang paling menentukan apakah V disebut ruang vektor atau tidak adalah operasi – operasi pada V atau bentuk dari V itu sendiri. Jika V merupakan ruang vektor dengan operasi – operasi vektor (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) yang bukan merupakan operasi standar, tentunya V harus memenuhi semua 10 syarat diatas, jika terdapat satu saja syarat tidak dipenuhi maka tentunya V bukan merupakan ruang vektor.

Contoh Ruang Vektor

1. V adalah himpunan vektor euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar), notasinya R^n .
2. V adalah himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
3. V adalah himpunan matriks berukuran mxn dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar), ruang vektor ini sering di notasikan dengan M_{mn}

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui suatu himpunan R^2

Analisis: Buktikan R^2 merupakan ruang vektor!

Evaluasi:……………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………….......................

…………………………………………………………………………….................

Kesimpulan:

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………….....................

Contoh Bentuk Umum dan Operasi Standar Polinom orde-n pada Ruang Vektor

1. Bentuk umum polinom orde – n

   $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

   $q_n(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$

2. Operasi standar pada polinom orde – n

   $p_n(x) + q_n(x) = a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_n+b_n)x^n$

   $k\ p_n = ka_0 + ka_1x + \ldots + ka_nx^n$

   Notasi untuk ruang vektor ini adalah P_n

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui : B = $\{(x, y)|x, y \in R\}$ dimana = $(x, y) + (x' + y') = (x + x' + 0)$ dan $k(x, y) = (2x, ky)$

Analisis: Apakah B merupakan ruang vektor?

Evaluasi:……………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………......................

..…………………………………………………………………………….................

Kesimpulan:

………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………......................

Ayo kita lihat contoh berikut!!!

Contoh 1.2

Menginterpretasi Masalah:

Selidiki bahwa V yaitu himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan operasi standar bukan merupakan ruang vektor, (a, b ∈ R) !

Evaluasi:

Untuk membuktikan V bukan merupakan ruang vektor adalah cukup dengan menunjukkan bahwa salah satu syarat ruang vektor tidak dipenuhi. Akan diselidiki apakah himpunan matriks dibawah ini memenuhi syarat yang pertama, yaitu
A , B ∈ V, maka vektor A + B ∈ V.

Misalkan A =$\begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$, p, q, r, s ∈ R maka A, B ∈V

A+B= $\begin{bmatrix} p+r & 2 \\ 2 & q+s \end{bmatrix} \notin V \rightarrow$ syarat 1 tidak terpenuhi

Kesimpulan:

Karena salah satu syarat dari ke 10 syarat ruang vektor tidak terpenuhi, jadi V bukan merupakan ruang vektor.

Contoh Bukan Ruang

Menginterpretasi Masalah:

Buktikan bahwa contoh dibawah ini bukan merupakan ruang vector:

1. V adalah himpunan vektor yang berbentuk (0, y) di R^2 dengan operasi vektor sebagai berikut : untuk $\overline{u}$ = (0,u_2) , $\overline{v}$ = (0,u_2) , maka k$\overline{u}$ = (0, –ku_2) dan $\overline{u} + \overline{v} =$ (0, u_2+v_2)
2. V himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$dengan operasi standar, a,b ∈ R

Analisis: Silahkan anda bisa memberikan contoh lainnnya selain contoh di atas!

……

……

Evaluasi:……………………………………………………………………………………………………..

……

Kesimpulan:…………………………………………………………………………………………………

……

Sifat-Sifat Aljabar Suatu Ruang Vektor

Hukum Kanselasi pada Penjumlahan

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x} + \overline{z}$, maka $\overline{y} = \overline{z}$ untuk semua $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ ∈ V (Hukum Kanselasi Kiri Terhadap +)
- $\overline{y} + \overline{z} = \overline{z} + \overline{x}$, maka $\overline{y} = \overline{z}$ untuk semua $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ ∈ V (Hukum Kanselasi Kanan Terhadap +)

Hukum Kanselasi pada Perkalian

- Jika$a \neq 0$ dan $\overline{x} . \overline{y} = \overline{x} . \overline{z}$, maka $\overline{y} = \overline{z}$ untuk semua $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ ∈ V (Hukum Kanselasi Kiri Terhadap .)
- Jika$a \neq 0$ dan $\overline{y} . \overline{x} = \overline{z} . \overline{x}$, maka $\overline{y} = \overline{z}$ untuk semua $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ ∈ V (Hukum Kanselasi Kiri Terhadap .)

Vektor Nol

$\mathbf{0 \in V}$ adalah tunggal

Untuk setiapad $\overline{v} \in V, \overline{-v} \in V$

$$0\overline{x} = \overline{x}; (-1)\overline{x} = \overline{-x};\ n\overline{x} = \overline{x} + \overline{x} + \ldots + \overline{x} (\text{n suku});\ \ a\overline{x} = \overline{0} \Rightarrow a = \overline{0}\ atau\ \ \overline{x} = \overline{0}, untuk\ setiap\ \overline{x} \in V\ dan\ a$$

Dari sifat-sifat aljabar suatu ruang vektor diatas, apakah ada sifat lainnya? Mengapa disebut dengan sifat-sifat aljabar?

....

....

....

....

C. Sub Ruang

Diketahui V ruang vektor dan U subhimpunan V. Kemudian U dikatakan sub– ruang dari V jika memenuhi dua syarat berikut :

1. **Jika** $\overline{u}, \overline{v} \in U\ maka\ \overline{u} + \overline{v} \in U$

2. **Jika** $\overline{u} \in U\ maka\ skalar\ k\ berlaku\ k\overline{u} \in U$

Contoh 1.3

Interpretasi Masalah:

Diketahui U adalah himpunan titik – titik di bidang dengan ordinat 0 dengan operasi standar R_2, selidiki bahwa U merupakan sub–ruang dari R_2 !

Analisis: Akan diselidiki bahwa U memenuhi dua syarat sub–ruang vektor , yaitu :

1. U = { x, 0 } untuk sembarang nilai x, x ∈ R

   Misalkan $\overline{a}$ = (x_1, 0) dan $\overline{b}$ = (x_2, 0) dengan x_1, x_2 ∈ R, maka $\overline{a}$, $\overline{b}$∈ U $\overline{a}+\overline{b}=$

   ($x_1 + x_2$,0) dengan $x_1 + x_2$ ∈ R

   Jadi a + b ∈R Jadi syarat ke– 1 terpenuhi.
2. Untuk skalar k, maka k $\overline{a}$= (kx_1, 0) dengan kx_1 ∈ R , jadi k $\overline{a}$∈ R_2

   Jadi syarat ke–2 terpenuhi.

   Kedua syarat terpenuhi , maka U merupakan sub–ruang R_2.

1. Diketahui U adalah himpunan yang berisi semua matriks orde 2x2 yang setiap unsur diagonalnya nol, selidiki bahwa U merupakan sub-ruang dari R_2 !

Evaluasi

1. U = { A , B } untuk sembarang nilai A, B ∈ M_{2X2} (kesemua diagonal utamanya 0)

   Ambil sembarang matriks A, B ∈ M_{2X2}

   Misalkan:

   $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$

   $A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$

   $A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$

   Jadi A + B ∈ R. Jadi syarat ke–1 terpenuhi.

2. Untuk skalar k ∈ R, Maka

   $k\,A = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \end{pmatrix} \in R$

Latihan 1.3

Interpretasi Masalah:

Diketahui U adalah himpunan vektor – vektor yang berbentuk (a,b,c) dengan a = b – c – 1 , a,b,c ∈ R dengan operasi standar R^3 , selidiki apakah U merupakan sub–ruang R^3 atau bukan!

Analisis: Akan diselidiki apakah U memenuhi syarat sub–ruang vektor R^3

Evaluasi: Misalkan $\overline{a}$ = ($b_1 - c_1 - 1$, b_1, c_1) dan $\overline{b}$ = ($b_2 - c_2 - 1$, b_2, c_2) dengan $b_1,b_2,c_1,c_2 \in R$ maka a, b ∈ R. $\overline{a} + \overline{b} =$ (b_1+b_2) – (c_1+c_2) – 2 , b_1+b_2, c_1+c_2) ∉ U

……

Kesimpulan:

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui : U = $\{(x, 0)|x \in R\}$

Analisis: Buktikan bahwa U merupakan sub ruang dari R^2

Evaluasi:…………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………......................

……………………………………………………………………….................

Kesimpulan:

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………….....................

D. Kombinasi Linier

Sebuah vektor $\overline{u}$ dikatakan **kombinasi linier** dari vektor-vektor $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jika vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\boldsymbol{\overline{u} = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n}$$

Dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar.

Contoh 1.5

Misalkan, $\overline{u} = [2,-1,3]$, $\overline{v} = [1,2,-2]$, apakah $\overline{x} = [8,1,5]$ merupakan kombinasi linier dari $\overline{u}$ dan $\overline{v}$.

Jawab

Perhatikan kombinasi linier

$\overline{x} = k_1 u + k_2 v$

$[8,1,5] = k_1[2,-1,3] + k_2[1,2,-2]$

$\overline{x} = 3u + 2v$

$(2k_1, -k_1, 3k_1) + (k_2, 2k_2, -2k_2)$

$(2k_1 + k_2), (-k_1 + 2k_2), (3k_1, -2k_2)$

Dari kesamaan vektor diperoleh:

$2k_1 + k_2 = 8,\ -k_1 + 2k_2 = 1, 3k_1, -2k_2 = 5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2b_2 + b_1 \\ 3b_2 + b_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Sehingga diperoleh:

$\boldsymbol{k_1 = 3}$
$\boldsymbol{k_2 = 2}$

Contoh 1.6

Diberikan vektor $v_1 = (1, 2, -1)$ dan $v_2 = (6, 4, 2)$ di R^3.

Selidiki bahwa:

a. $w = (9, 2, 7)$ adalah kombinasi linaer dari v_1 dan v_2

b. $v = (4, -1, 8)$ bukan kombinasi linaer dari v_1 dan v_2

Jawab:

a. $w = (9, 2, 7)$ kombinasi linear dari v_1 dan v_2 jika $\exists k_1, k_2 \in R$ sehingga berlaku:

$w = k_1 v_1 + k_2 v_2$

$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$

$= (k_1 + 2k_1 - k_1 + 6k_2 + 4\,k_2 - 2\,k_2)$

$= (k_1 + 6k_2, \quad 2k_1 + 4\,k_2 - k_1 + 2\,k_2)$

Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh:

$$k_1 + 6k_2 = 9$$
$$2k_1 + 4\,k_2 = 2$$
$$-k_1 + 2\,k_2 = 7$$

Dengan menyelesaikan sistem ini, diperoleh $k_1 = -3$, dan $k_2 = 2$, sehingga w

Kombinasi linear dari v_1 dan v_2

b. $v = (4, -1, 8)$ kombinasi linear dari v_1 dan v_2 jika $\exists k_1, k_2 \in R$ sehingga berlaku:

$w = k_1 v_1 + k_2 v_2$

$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$

$= k_1 + 2k_1 - k_1 + 6k_2 + 4\,k_2 - 2\,k_2$

$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4\,k_2 - k_1 + 2\,k_2)$

Kesimpulan: Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh:

$k_1 + 6k_2 = 4$

E. Membangun Ruang Vektor

Jika $u_1, u_2, \ldots, u_n$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V, dan jika setiap vektor x pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $u_1, u_2, \ldots, u_n$, maka $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dikatakan membangun ruang vektor V.

Contoh Soal 1.7

Interpretasi Masalah: Diberikan $\overline{u} = [1,2,-1], \overline{v} = [-2,3,3], \overline{w} = [1,1,2]$ di R^3.

Analisis: Tunjukan apakah, $\overline{u} = [1,2,-1], \overline{v} = [-2,3,3], \overline{w} = [1,1,2]$ membangun R^3?

Evaluasi:

Andaikan $\overline{x} = [x_1, x_2, x_3]$ vektor di R^3. Bentuk kombinasi linier $\overline{x} = k_1 u + k_2 v + k_3 w$

$$[x_1, x_2, x_3] = k_1[1,2,-1] + k_2[-2,3,3] + k_3[1,1,2]$$

Dari kesamaan vektor dihasilkan sistem persamaan linier,

$$\begin{aligned} k_1 - 2k_2 + k_3 &= x_1 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 &= x_2 \\ -k_1 + 3k_2 + 2k_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 22$$

Kesimpulan: ………

BAB 2 BASIS DAN DIMENSI

A. Basis

Misalkan V ruang vektor dan $= \{\overline{s}_1,\ \overline{s}_2 \dots, \overline{s}_n\}$. S disebut basis dari V bila memenuhi dua syarat, yaitu :

S bebas linier

S membangun V

Basis dari suatu ruang vektor tidak harus tunggal tetapi bisa lebih dari satu. Ada dua macam basis yang kita kenal yaitu **basis standar** dan **basis tidak standar.**

Contoh Basis Standar

1. $S = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n\}$, dengan $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n \in R^n$

$$e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n, \overline{e}_n \in R^n$$

Merupakan basis standar dari R^n.

2. $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ dan merupakan basis standar untuk Pn (polinom orde n)

$S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$merupakan basis standar untuk M_{22}

Dimensi ruang vektor didefinisikan sebagai banyaknya vektor dalam basis dari suatu ruang vektor tersebut.Dimensi suatu ruang vektor V disimbolkan dengan dim(V). Jadi dim (R^3) = 3, dim (P_{2}) = 3 dan dim (M_{2x2})= 4 dan sebagainya.

Pada pembahasan mengenai *membangun dan bebas linier*, suatu himpunan vektor dapat ditunjukkan merupakan himpunan yang bebas linier atau membangun ruang vektor V hanya dengan melihat dari jumlah vektor dan dim ruang vektor. Pada contoh,banyaknya vektor = 3 dan dim (R^2) = 2, sebenarnya tanpa menghitung kita sudah bisa menyimpulkan bahwa himpunan vektor tersebut tidak bebas linier karena agar bebas linier **maksimal jumlah vektor = dim ruang vektor**. Sebaliknya jika suatu himpunan vektor hanya memuat vektor dengan **jumlah kurang dari dim ruang vektor**, maka dapat disimpulkan bahwa himpunan vektor tersebut **tidak membangun.**

Misalkan $S = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ... \overline{u}_n\}$ adalah himpunan vektor di ruang vektor V, himpunan S dikatakan **bebas linear***(linearly independent)*, jika spl homogeny:

$$\boxed{k_1\overline{u}_1 + k_2\overline{u}_1 + \cdots + k_n\overline{u}_n = \overline{0}}$$

Hanya mempunyai satu solusi (tunggal), yakni:

$$\boxed{k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \ldots k_n = \overline{0}}$$

Jika solusinya lebih dari satu, artinya ada solusi $k_1 \neq 0$ untuk suatu i, maka S kita namakan himpunan tak bebas linear *(linearly independent)*, ini dapat dikatakan bahwa himpunan S merupakan himpunan vektor yang bergantung linear.

Contoh 2.1

Interpretasi Masalah: Diketahui $\overline{u} = (-1, 3, 2)$ dan $\overline{a} = (1, 1, -1)$.

Analisis: Tentukan apakah saling bebas linear?

Evaluasi:

Tulis:

$$k_1\overline{u}_1 + k_2\overline{a} \quad = 0 \text{ atau } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan operasi baris elementer dapat diperoleh:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Kesimpulan: Dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu: $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui $\overline{u}_1 = (1, -2, 3)$, $\overline{u}_2 = (5, 6, -1)$ dan $\overline{u}_3 = (3, 2, 1)$,

Analisis: Tentukan apakah saling bebas linear?

Evaluasi:……………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………….....................

..……………………………………………………………………….................

Kesimpulan:

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………...................

……………………………………………………………………………....................

Teorema 2.1

Jika $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ dan $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, maka $m = n$

Berdasarkan hal ini, maka suatu himpunan vektor kemungkinan bisa menjadi basis ruang vektor berdimensi n jika jumlah vektornya = n. Jika jumlah vektor<n maka tidak membangun sebaliknya jika jumlah vektor > n maka bergantung linier. Jika jumlah vektor = n , maka dapat dihitung nilai determinan dari ruang yang dibangun oleh himpunan vektor tersebut. Jika det = 0, maka ia tidak bebas linier dan tidak membangun.

Jika det ≠ 0, maka ia bebas linier dan membangun Æ merupakan basis.

Latihan Soal

Interpretasi Masalah: ……………………………………………………………………………………………

Analisis: Tentukan apakah H= $\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\right\}$ merupakan basis M_{22} !

Evaluasi:

Jumlah matriks (bisa dipandang sebagai vektor di R^4) dalam H = 4 = dim M_{22}. Jadi untuk menentukan apakah H merupakan basis dari R^4 atau bukan adalah dengan melihat nilai determinan dari ruang yang dibangun oleh H. Misalkan W adalah ruang yang dibangun oleh H , maka untuk sembarang w ∈

W berlaku $W = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 2\\1 & 0 & 0 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix} = A\overline{k}$

Untuk menentukan apakah H merupakan basis atau tidak adalah dengan menghitung nilai det (A) dari SPL diatas

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 2\\1 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{vmatrix} = -2.3.1 + 2.1.1 = -4$$

Contoh 2.2

Menginterpretasi Masalah:

Anggap $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,9,0)$, $v_3 = (3,3,4)$

Analisis:

Selidiki bahwa himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah suatu basis untuk R^3 !

1. S bebas secara linear, harus diselidiki satu-satunya penyelesaian dari : $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$ adalah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
2. S merentang R^3, harus diselidiki bahwa sembarang vektor b = (b_1, b_2, b_3) dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear b = $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

Evaluasi:

Dari syarat (1) diperoleh matriks koefisien dengan persamaan :

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0 \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 + 4k_3 = 0$$

Dari syarat 2 diperoleh persamaan :

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b_2 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$k_1 + 4k_3 = 0$$

Kesimpulan:

Berdasarkan teorema, untuk membuktikan bahwa S bebas linear dan merentang dengan menunjukkan bahwa determinan matriks koefisien tidak sama dengan nol ($\det(A) \neq 0$).

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Mempunyai determinan tak nol ($\det(A) \neq 0$). Akan tetapi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Sehingga S merupakan suatu basis untuk R^3.

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui $= (v_{1,}\ v_2, v_3\ )$ dimana $v_1 = (3, 1, 4),\ \ v_2 = (2, 5, 6)$, dan $v_3 = (1, 4, 8)$

Analisis: Apakah merupakan basis untuk R^3 !

Evaluasi:

………

………

………

Kesimpulan:

………

………

Contoh 2.3

Menginterpretasi Masalah:

Andaikan ruang V = $\{u, v, w, s\}$dimana :

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, dan \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Analisis: Cari basis dan dimensi dari ruang V !

Evaluasi:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kesimpulan: Basis dari $V = \{(-1,1,1)^T, (0, -1,3)^T\}$

B. Dimensi

Sebuah ruang vektor dikatakan berdimensi berhingga, jika ruang vektor V mengandung sebuah himpunan berhingga vektor $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ yang membentuk basis. Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis V.

Contoh 2.4

Misalkan $B = \{i, j, k\}$dengan $i = [1,0,0]$, $j = [0,1,0]$, dan $k = [0,0,1]$. B adalah basis baku untuk R^3. Karena banyaknya vektor yang membentuk basis B adalah 3, maka R^3 berdimensi 3.

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah:

Misalkan $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ dimana $u_1 = [1,2,2]$, $u_2 = [2,1,2]$ dan $u_3 = [1,3,3]$.

Analisis: Apakah S basis untuk R^3

Evaluasi:

Misalkan $x = [x_1, x_2, x_3]$ vektor di R^3 bentuk komposisi linier :$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = x$

$$k_1 = [1,2,1] + k_2 = [2,1,2] + k_3 = [1,3,4] = [x_1, x_2, x_3]$$

Dari kesamaan vektor dihasilkan persamaan linier

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + k_3 &= x_1 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= x_2 \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= x_3 \end{aligned} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} \ldots & 2 & 1 \\ 2 & \ldots & 3 = -1 \\ 2 & 2 & \ldots \end{array} \right|$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan: Karena solusi SPL adalah tunggal, jadi S adalah basis untuk R^3

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Dketahui suatu persamaan linear homogen

$$
= \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}
$$

Analisis: Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi sistem persamaan linear homogen.

Evaluasi:………………………………………………………………………………....
.

……………………………………………………………………………….................
....……………………………………………………………………………...............
..

Kesimpulan:

…………………………………………………………………………………………

RANGKUMAN

Ruang – n Euclides

- Suatu ruang vektor X atas $\mathbb{K}$ adalah suatu himpunan X yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan

$\overline{u} + \overline{v}\ , u\ , v\ \in X$

αu, $\alpha \in \mathbb{K}$, u$\in$X

- Penjumlahan vektor

$\overline{u} + \overline{v} =$ **($u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n$)u2+v2,...,un+vn)**

- Perkalian titik

$$\overline{u}.\overline{v} = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + \cdots + u_n.v_n)$$

- Perkalian dengan skalar

k $\overline{u}$ = (ku_1, ku_2 , . .., ku_n)

- Panjang vektor

$$\|\overline{u}\| = (\overline{u}.\overline{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2}$$

- Jarak antar vektor

$$\mathrm{d}(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u} - \overline{v}\ .\ \overline{u} - \overline{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Ruang Vektor

Ruang vektor merupakan struktur matematika yang terbentuk oleh sekumpulan vektor dengan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian skalar serta memenuhi beberapa aksioma.

Syarat V disebut Ruang Vektor

Andaikan V sebarang himpunan tak kosong. V dapat dinyatakan sebagai ruang vektor jika dua operasi yang didefinisikan memenuhi 10 sifat berikut, yaitu :

1. Jika vektor – vektor $\overline{u}$, $\overline{v}$∈ V , maka vektor $\overline{u} + \overline{v} \in V$
2. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
3. $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
4. Ada $e \in V$ sehingga $e + \overline{u} = \overline{u} + e$ untuk semua $\overline{u}$, $e \in V$, e : vektor nol
5. Untuk setiap $\overline{u} \in V$ terdapat $-\overline{u} \in V$ sehingga $\overline{u} + (-\overline{u}) = (-\overline{u}) + \overline{u} = \overline{0}$
6. Untuk sembarang skalar k , jika $\overline{u}$∈ V maka $k\overline{u}$∈ V
7. $k(\overline{u} + \overline{v}) = k\overline{u} + k\overline{v}$, k sembarang scalar
8. (k + l) $\overline{u}$ = k $\overline{u}$ + l $\overline{u}$, k dan l skalar
9. k(l $\overline{u}$) = (kl) $\overline{u}$
10. 1 $\overline{u}$ = $\overline{u}$

Sub Ruang Vektor

1. **Jika $\overline{u}$, $\overline{v}$ $\in U$ maka $\overline{u} + \overline{v} \in U$**

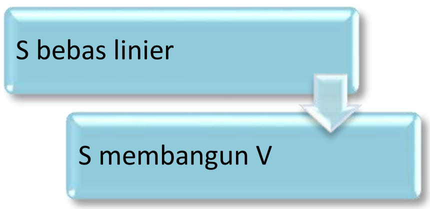
1. **Jika $\overline{u}$ $\in U$ maka skalar k berlaku $k\overline{u} \in U$**

Kombinasi Linier

$$\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{k_1 u_1} + \boldsymbol{k_2 u_2} + \cdots + \boldsymbol{k_n u_n}$$

Basis dan Dimensi

- Misalkan V ruang vektor dan $= \{\overline{s}_1, \overline{s}_2 \dots, \overline{s}_n\}$. S disebut basis dari V bila memenuhi dua syarat, yaitu :

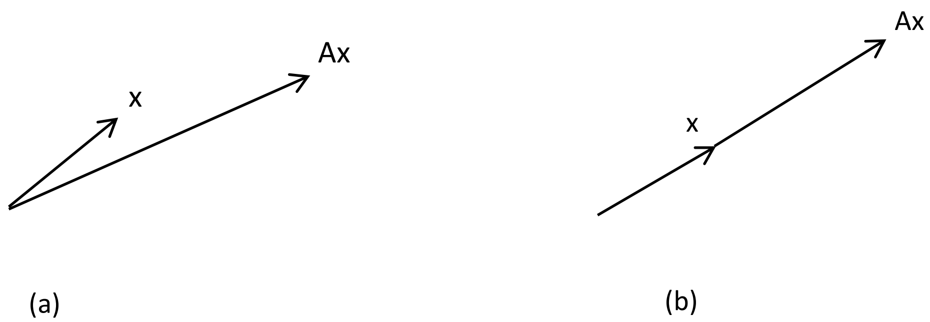


- Sebuah ruang vektor dikatakan berdimensi berhingga, jika ruang vektor V mengandung sebuah himpunan berhingga vektor $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ yang membentuk basis. Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis V.

BAB 3 RUANG EIGEN DAN DIAGONALISASI

A. Nilai Eigen dan Vektor

Perhatikan sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$ dan sebuah vektor x pada R^n dan biasanya secara umum tidak ada hubungan antara vektor x dengan vektor Ax (Gambar 1.1a). Namun, ada beberapa vektor x tak nol sehingga x dan Ax merupakan penggandaan satu sama lainnya (Gambar 1.1b).



Gambar 1.1

Definisi 1.1

Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka vektor x yang tidak nol di R^n disebut vektor eigen (eigen vektor) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigen value*) dari A.

Contoh 3.1

Matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, maka vektor x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks A, sebab Ax adalah kelipatan dari x, yaitu

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3x$$

Dalam hal ini $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari matriks A.

Contoh 3.2

Diketahui matriks P = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Vektor $x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor eigen dari matriks P, sebab

$$Px_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x_1$$

Dan $Px_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1x_1$

Nilai-nilai eigen dari matriks P adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$.

Apakah setiap matriks A yang berukuran $n \times n$ selalu mempunyai vektor eigen dan nilai eigen? Berapa banyak vektor eigen dan nilai eigen yang dimiliki oleh sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$? Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan ini sekaligus memberikan penjelasan lebih lanjut dari dua contoh di atas, sehingga kita dapat dengan cepat dan tepat memberikan jawabannya, perhatikanlah uraian berikut dengan baik.

B. Persamaan Karakteristik

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$, maka kita perlu memperhatikan kembali definisi vektor eigen dan nilai eigen, yaitu $Ax = \lambda x$. Bentuk ini dapat kita tulis sebagai berikut:

$$\mathbf{Ax = \lambda I x}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I - A)\,x = 0 \quad \text{...}(1)$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\,x = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian yang tidak nol dari persamaan (1) ini. Menurut teorema dalam bahasan sebelumnya, maka persamaan (1) akan mempunyai penyelesaian tak nol (mempunyai penyelesaian non trivial) jika dan hanya jika:

$$\mathbf{\det(\lambda I - A) = 0}$$

Definisi 1.2

Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ dengan λ sebagai variabel disebut **persamaan karakteristik** dari matriks A. Akar-akar atau skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen (nilai-nilai karakteristik) dari matriks A. Det $(\lambda I - A) \equiv f(\lambda)$ yaitu berupa polinom dalam λ yang dinamakan polinom karakteristik.

Dari pemahaman definisi di atas, jelas bahwa jika A adalah matriks $n \times n$, maka persamaan karakteristik dari matriks A mempunyai derajat n dengan bentuk

$$\mathbf{\det(\lambda I - A) = f(\lambda) = a_0 + a_2x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0}$$

Menurut teorema dasar aljabar kita dapatkan bahwa persamaan karakteristik tersebut mempunyai paling banyak n penyelesaian yang berbeda (Ingat metode Horner dan persamaan pangkat tinggi). Jadi, suatu matriks yang berukuran $n \times n$ paling banyak mempunyai n-nilai eigen yang berbeda.

Setelah kita memperhatikan uraian di atas, tentunya para pembaca berharap untuk meninjau ulang Contoh 3. 1 atau Contoh 3. 2 di atas sehingga kita mendapatkan nilai-nilai eigen dari matriks 2×2 dengan menyelesaikan persamaan karakteristiknya

Contoh 3.3

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks Q = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian: Polinom karakteristik dari matriks Q adalah

det (λ I – Q) = det $\left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

= det $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$

= $\lambda^2 - 3\lambda + 2$

dan persamaan karakteristik dari matriks Q adalah

$$\lambda 2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Penyelesaian dari persamaan ini adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$. Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks Q adalah 1 dan 2.

Contoh 3.4

Diketahui untuk A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Carilah: a) Persamaan karakteristik dari matriks A

b) Nilai-nilai eigen dari matriks A

Penyelesaian:

a) Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\det(\lambda \text{ I} - \text{A}) = \det \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{atau } \det(\text{A} - \lambda \text{ I}) = \det \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 2(1 - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - \lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2)(2 - 2\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

b) Untuk mencari nilai-nilai eigen dari matriks A harus mencari akar-akar atau nilai-nilai λ yang memenuhi persamaan pangkat tiga:

$\lambda 3 - 6\lambda 2 + 11\lambda - 6 = 0$ ………………………......................…. (2)

Untuk menyelesaikan persamaan ini, kita perlu terlebih dahulu memahami persamaan pangkat tinggi dengan akar-akar bulat yang telah kita pelajari di SLTA.Untuk itu tentunya kita masih ingat bahwa secara sederhana dapat memanfaatkan kenyataan tentang semua penyelesaian bilangan bulat (jika himpunan penyelesaian $\neq 0$) dari persamaan polinom dengan koefisien-koefisien bilangan bulat.

$$a_n \lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

- harus atau pasti merupakan pembagi dari suku konstanta a_0. Jadi, penyelesaian-penyelesaian bilangan bulat yang mungkin dari persamaan (2) adalah pembagi-pembagi dari 6, yaitu ± 1, ± 2, ± 3, dan ± 6. Selanjutnya substitusikan nilai-nilai ini berturut-turut pada persamaan (2) sehingga kita dapatkan akar-akarnya, dan tentunya memerlukan bantuan teorema sisa atau metode horner untuk persamaan pangkat tinggi. Dalam hal ini $\lambda = 1$ memenuhi persamaan (2), sebab $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$.
- Sebagai akibatnya $(\lambda - 1)$ haruslah merupakan faktor dari ruas kiri persamaan (2). Dengan bantuan teorema sisa, yaitu membagi persamaan (2) oleh $(x - 1)$ kita dapatkan dua nilai λ lainnya, yaitu $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$, sehingga akar dari persamaan (2), yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.
- Untuk menyelesaikan persamaan (2) dapat pula dilakukan dengan bantuan metode Horner, dengan langkah pertama sema seperti di atas yaitu sampai mendapatkan $\lambda_1 = 1$ dan langkah berikutnya sebagai berikut:

	1	-6	11	-6	(koefisien-koefisien persamaan (2)
$\lambda 1 =$		1	-5	6 +	
	1	-5	6	0	

$(\lambda - 1)(\lambda 2 - 5\lambda + 6) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Jika suatu matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

Analisis: Carilah persamaan karakteristik dari matriks A!

Evaluasi:……………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………….....................

...……………………………………………………………………………….................

Kesimpulan:

……………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………….....................

……………………………………………………………………………….....................

Contoh 3.5

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks T = $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Seperti kedua contoh di atas, maka persamaan karakteristik dari matrik T adalah

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ (-2 – λ)(2 – λ) – (1)(-7) = 0

$\Leftrightarrow$ λ2 + 3 = 0

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3}i \;\; dan \;\; \lambda_2 = -\sqrt{3}i$$

(nilai-nilai eigennya adalah bilangan imajiner).

Karena nilai-nilai eigen dari matriks T adalah bilangan imajiner, sedangkan menurut definisi λ adalah skalar atau bilangan real. Maka matriks T tidak mempunyai nilai eigen.

Catatan

Dari contoh 3. 5 kita mendapatkan nilai-nilai eigen kompleks dari matriks yang real. Hal ini akan membawa kita untuk meninjau kemungkinan ruang-ruang vektor kompleks, yaitu ruang-ruang vektor dengan skalar-skalarnya nilai kompleks. Diskusi kita untuk ruang-ruang vektor kompleks dengan nilai-nilai eigen kompleks akan dijumpai dalam kesempatan lain. Dalam kesempatan sekarang akan dibatasi pada contoh-contoh dengan nilai eigen yang real.

Sekarang kita perhatikan teorema berikut yang merupakan ikhtisar dari hasil yang telah diperoleh melalui diskusi materi pembelajaran di atas.

Teorema 1.1

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dan λ adalah suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen

(a) λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

(b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai penyelesaian tak trivial (non trivial).

(c) Ada vektor x yang tidak nol dalam R^n sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$.

(d) λ adalah suatu penyelesaian real dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$

Bukti: Kita akan memperlihatkan bahwa (a), (b), (c), dan (d) ekuivalen satu sama lainnya dengan membuktikan urutan implikasi (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b). Karena λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A, maka menurut definisi nilai eigen berlaku: $Ax = \lambda x$ dengan x tak nol.

$\Leftrightarrow \lambda I x - Ax = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0$

Karena x tak nol maka sistem persamaan linear homogen $(\lambda I - A)x = 0$

Harus mempunyai penyelesaian non-trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c). Karena $(\lambda I - A)x = 0$ maka

$\Leftrightarrow Ax = \lambda I x$

$\Leftrightarrow Ax = \lambda x$

(c) $\Rightarrow$ (d). Karena $Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow Ax = \lambda I x$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A) x = 0$

Karena ada x tidak nol, maka sistem persamaan linear homogen $(\lambda I - A) x = 0$ haruslah det $(\lambda I - A) = 0$ dengan λ adalah suatu penyelesaian realnya.

(d) $\Rightarrow$ (a). Karena λ adalah penyelesaian real dari persamaan det $(\lambda I - A) = 0$, maka λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik det $(\lambda I - A) = 0$ atau dengan kata lain λ adalah nilai eigen dari matriks A.

C. Ruang Eigen

Setelah kita memahami bagaimana mencari nilai-nilai eigen hubungannya dengan persamaan karakteristik, maka sekarang akan beralih ke masalah untuk mencari vektor eigen. Menurut definisi terdahulu bahwa vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor x yang tidak nol dan haruslah memenuhi $Ax = \lambda x$. Dengan kata lain, secara ekuivalen tentunya vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor yang tak nol dalam ruang penyelesaian $(\lambda I - A) x = 0$. Ruang penyelesaian ini kit anamakan sebagau **ruang eigen** (*eigen space*) dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Apakah ruang eigen ini membentuk basis?

Definisi 1.3

Ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear $(\lambda I - A) x = 0$ atau $(A - \lambda I) x = 0$ dinamakan ruang eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$.

Sekarang kita perhatikan beberapa contoh, bahwa vektor-vektor eigen suatu matriks akan membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks tersebut.

Contoh 3.6

Menginterpretasi Masalah: Diketahui matriks seperti dalam contoh 3. 4, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analisis: Carilah basis untuk ruang eigen dari matriks A.

Evaluasi:

Telah diselesaikan dalam Contoh 3.4 di atas, bahwa dari persamaan karakteristik

$$\det (A - \lambda I) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11 \lambda - 6 = 0$$

didapat tiga buah nilai eigen matriks A, yaitu

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \text{ dan } \lambda_3 = 3.$$

Sebagai konsekuensinya akan kita dapatkan tiga buah ruang eigen dari matriks A. Menurut definisi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah suatu penyelesaian non trivial dari sistem persamaan linear homogen:

$(\lambda I - A)\, x = 0$ atau $(A - \lambda I)\, x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Untuk $\lambda_1 = 1$, maka (3) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 3x_1 + x_3 = 0$

$-2x_1 = 0$

$-2x_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$

$x_2 = t \in R$

$x_3 = 0$

Vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda 1 = 1$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

Jadi, vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan suatu basis untuk ruang eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 2$, maka (3) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4x1 + x3 = 0

-2x1 – x2 = 0

-2x1 – x3 = 0

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} b_2 + b_1 \\ b_3 + b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right]$$

$\Leftrightarrow 2x_1 \quad + x_3 = 0$

$-x_2 + x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_3$

$x_2 = x_3$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\ t$, $x_2 = t$, $x_3 = t \in R$

Kesimpulan: Jadi, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$.

Untuk $\lambda_3 = 3$, maka (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 \quad + x_3 = 0$

$\Leftrightarrow -2x_1 - 2x_2 \quad = 0$

$-2x_1 - 2x_3 \quad = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2b_1 + b_2 \\ 2b_1 + b_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}b_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow x_1 \quad + x_3 = 0$

$-x_2 - x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = - x_3 = -t$

$x_2 = x_3 = t$

$x_3 = t \in R$

Vektor eigen untuk $\lambda_3 = 3$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$.

D. Diagonalisasi

Pada bahasan pembelajaran berikut kita akan mendiskusikan masalah mencari suatu baris untuk R^n yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari suatu matriks A yang diketahui berukuran n x n. Basis-basis ini dapat dipakai untuk menelaah sifat-sifat geometris dari matriks A dan sekaligus dipakai untuk menyederhanakan berbagai perhitungan numerik yang melibatkan matriks A. Basis-basis sangat penting dalam berbagai penerapan aljabar linear. cara menyelesaikan sistem persamaan linear AX = **b** dengan A matriks berukuran n x n yang invertibel dapat dilakukan dengan bantuan matriks A^{-1}, sehingga terjadi pengkombinasian $A^{-1}AX = A^{-1}\mathbf{b}$ atau $X = A^{-1}\mathbf{b}$. Berdasarkan ide yang sama seperti di atas, maka dalam bagian ini kita akan mengkombinasikan persamaan nilai eigen untuk beberapa vektor eigen yang berlainan ke dalam persamaan matriks yang tunggal. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan penjelasan berikut ini.

Pandang matriks A berukuran n x n dengan vektor-vektor eigen (yang bebas linear) u_1, u_2, ..., u_k yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Sebagai akibatnya maka

$$\mathbf{Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2, ..., Au_k = \lambda_k u_k}$$

atau

$$\mathbf{Au_r = \lambda_r u_r \text{ dengan } r = 1, 2, ..., k.} \quad \text{.....................................} \quad \mathbf{(1)}$$

Vektor-vektor u_i dapat dikelompokkan menjadi bentuk matriks n x k, yang ditulis sebagai matriks partisi

$$\mathbf{P = (u_1 \quad u_2 \quad ... \quad u_k)}$$

Dengan u_i adalah kolom ke-i dari P. Selanjutnya persamaan (1) dapat ditulis menjadi bentuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= \mathbf{(Au_1 \quad Au_2 \quad ... \quad Au_k)} \\ &= \mathbf{(u_1 \quad u_2 \quad ... \quad u_k)\, D} \end{aligned}$$

dengan D adalah matriks diagonal k x k dengan unsur-unsurnya $\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_k$. Jadi kita dapatkan

$$\mathbf{AP = PD \text{ atau } PD = AP} \quad \text{..}$$

Bentuk ini merupakan bentuk yang ringkas dari persamaan nilai eigen untuk k vektor eigen.

Sekarang misalkan matriks A yang berukuran n x n mempunyai n vektor eigen, sehingga k = n. Akibatnya matriks P menjadi berukuran n x n, dengan kolom-kolomnya vektor-vektor eigen (yang bebas linear), dan P tentunya invertibel. Selanjutnya dengan mengalikan persamaan (2) oleh P^{-1} dari sebelah kiri kita dapatkan:

$$\mathbf{D = P^{-1}A\,P} \quad \text{...} \quad \mathbf{(3)}$$

Dengan demikian jika suatu matriks A yang berukuran n x n mempunyai n vektor eigen yang bebas linear, maka terdapat matriks P yang inverstibel dan matriks diagonal D sehingga D dapat difaktorkan dalam bentuk persamaan (3). Keadaan ini dinamakan A dapat didiagonalkan (*diagonalizable*).

Definisi 1.5

Suatu matriks persegi (matriks bujursangkar) A dinamakan dapat didiaginalkan (dapat didiagonalisasi) jika ada suatu matriks P yang invertibel sedemikian rupa sehingga $P^{-1}A$ P adalah suatu matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalkan A (mendiagonalisasi) matriks A.

Dari penjelasan dan definisi di atas, jelaskah bahwa masalah diagonalisasi dari suatu vektor A yang berukuran n x n adalah ekuivalen dengan pertanyaan: "Apakah ada matriks P yang invertibel sehingga P^{-1} A P adalah matriks diagonal D?". Prosedur berikut menunjukkan bahwa masalah vektor-vektor eigen dan asalahan diaginalisasi adalah setara. Dengan kata lain prosedur berikut adalah tahapan untuk mendiagonalkan matriks yang berukuran n x n.

Tahap 1. Carilah n vektor eigen yang bebas linear dari matriks A yang berukuran n n. Misalnya $p_1, p_2, ..., p_n$.

Tahap 2. Bentuklah matriks P yang mempunyai $p_1, p_2, ..., p_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.

Tahap 3. Matriks $D = P^{-1} A P$ adalah matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sebagai unsur-unsur diagonal yang berurutannya dan λ_i adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan p_i untuk I = 1, 2, 3, …, n.

Contoh 3.7

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Carilah: a) matriks P yang mendiagonalisasi A.

b) matriks diagonal $D = P^{-1} A P$.

Penyelesaian: a) Persamaan karakteristik matriks A

det (λ I – A) = 0

$$\Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -6 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$ (nilai-nilai eigen A)

Untuk $\lambda_1 = 1$, sistem persamaan linear homogennya

(λ I – A)x = O

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -6x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}t \\ x_2 = t \in R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ 1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -1$, sistem persamaan linear homogennya:

(λ I – A)x = O

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -6x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \in R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Jadi, basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ_1 = -1 adalah $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dengan demikian kita dapatkan bahwa (p_1, p_2) adalah bebas linear, sehingga

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ akan mendiagonalkan matriks A.

b) Mencari matriks diagonal sekaligus sebagai pemeriksaan bahwa D = P^{-1}A P.

$$D = P^{-1}AP = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Catatan

Dalam contoh ini tidak ada urutan yang diistimewakan untuk kolom-kolom P. Karena unsur-unsur diagonal ke-i dan D = $P^{-1}A$ P adalah nilai-nilai eigen untuk vektor kolom dari matriks P, maka dengan mengubah urutan kolom-kolom matriks P hanyalah mengubah urutan nilai-nilai eigen pada diagonal untuk D = $P^{-1}AP$. Jadi seandainya matriks P-nya ditulis seperti berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka kita akan memperoleh matriks diagonal D = $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh 3.8

Carilah matriks P yang mendiagonalkan matriks a = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Dari contoh 1. 4, nilai-nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$. Kemudian dari contoh 1. 6 telah diperoleh vektor-vektor bebas linear:

$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

berturut-turut bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$ dari matriks A. Jadi, matriks yang mendiagonalisasi matriks A adalah

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk memeriksa bahwa P adalah matriks yang mendiagonalisasi matriks A dapat dilakukan dengan menentukan matriks diagonal D = P^{-1}A P dengan unsur-unsur diagonal utamanya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A yang urutannya adalah nilai-nilai eigen dari matriks A yang urutannya sesuai urutan vektor-vektor kolom matriks P, yaitu:

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Jika suatu matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Analisis: a. Selidiki bahwa matriks A dapat didiagonalisasi

b. Selidiki matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}BP$ adalah matriks diagonal

Evaluasi:...
...

....
....
......

Kesimpulan:

....

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui suatu matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Analisis: Perlihatkan bahwa matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ tidak dapat didiagonalisasi .

Evaluasi: Persamaan karakteristik matriks A adalah det (A – λI) = 0.

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (2 - \lambda)\ (2 - \lambda) = 2$

$\Leftrightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (nilai-nilai eigen matriks A)

Untuk $\lambda = 2$, sistem persamaan linear homogennya:

$(A - \lambda\ I)\ x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = t \in R$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Kesimpulan: Basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor yang bebas linear, yaitu

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena basis ruang eigen berdimensi satu suatu matriks A tidak mempunyai dua vektor eigen yang bebas linear, sehingga A tidak dapat didiagonalisasi.

Perlu diketahui, bahwa dari ketiga contoh terakhir di atas tadi (contoh 1. 7, 1. 8, dan 1. 9) kita beranggapan bahwa vektor-vektor kolom dari matriks P yang disusun dari vektor-vektor basis dari berbagai ruang eigen dari matriks A adalah bebas linear. Teorema berikut akan membahas asumsi tersebut.

Teorema 1.2

Jika $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ adalah vektor-vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ yang berbeda, maka $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ adalah himpunan yang bebas linear.

Bukti:

Misalkan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$. Untuk mendapatkan kontradiksinya, kita mengasumsikan vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ tak bebas linear, sehingga dapat disimpulkan bahwa $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ bebas linear.

Karena berdasarkan definisi, suatu vektor eigen tentunya tidak nol, maka $\{v_1\}$ bebas linear. Misalkan r adalah bilangan bulat terbesar sehingga $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$bebas linear. Karena kita mengasumsikan bahwa $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ tak bebas linear, maka r memenuhi $1 \leq r < k$. Lebih jauh berdasarkan definisi r, maka $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ tak bebas linear. Jadi, terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_r + 1$ yang tidak semuanya nol, sehingga

c1v1 + c2 v2 + ... + cr + 1vr + 1 = 0 .... (1)

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1) oleh A dan dengan menggunakan

$$\mathbf{Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \ldots, Av_r + 1 = \lambda_r + 1v_r + 1}$$

kita dapatkan:

$$\mathbf{c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + c_r + 1 \lambda_r + v_r + 1 = 0} \quad \textbf{.. (2)}$$

Selanjutnya dengan mengalikan kedua ruas persamaan (1) dengan $\lambda r + 1$ dan mengurangi persamaan (2) dengan persamaan yang didapatkan, maka kita akan mendapatkan

$$\mathbf{c_1(\lambda_1 - \lambda_r + 1)v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_r + 1)v_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_r + 1)v_r =}$$

Karena $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah himpunan yang bebas linear, maka persamaan ini mengimplikasikan bahwa:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_r + 1)v_1 = c_2(\lambda_2 - \lambda_r + 1)v_2 = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_r + 1)v_r =$$

dan karena $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r + 1)$ masing-masing berbeda, maka kita dapatkan:

$$c_1 = c_2 = ... = c_r = 0 \quad \text{...} \quad (3)$$

Dengan mensubstitusikan nilai ini pada persamaan (1), maka akan didapatkan

$$c_{r+1}v_{r+1} = 0$$

Karena vektor eigen v_{r+1} tidak nol, maka

$$c_{r+1} = 0 \quad \text{...}$$

Persamaan (3) dan (4) kontradiksi dengan fakta bahwa $c_1, c_2, ..., c_{r+1}$ tidak semuanya nol.

Sebagai implikasi dari teorema 1.2 ini, kita mendapatkan hasil penting berikut ini.

Teorema 1.3

Jika suatu matriks A berukuran n x n mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda-beda, maka A dapat didiagonalisasi.

Bukti:

Jika $v_1, v_2, ..., v_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, maka menurut teorema 1. 2 haruslah $v_1, v_2, ..., v_n$ bebas linear. Jadi, A dapat didiagonalisasi,

Contoh 3.10

Kita perhatikan kembali matriks Q dan A dalam contoh 3.3 dan 3.4, yaitu:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen yang berbeda, yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$, sehingga Q dapat diagonalisasi. Jadi

$$D = P^{-1}Q\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk suatu matriks P yang invertibel. Demikian pula

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen yang berbeda, yaitu $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$, maka A dapat diagonalisasi, dan matriks

$$D = P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan matriks P invertbel. Jika diinginkan matriks P ini dapat dicari dengan menggunakan metode seperti yang ditunjukkan dalam contoh-contoh diagonalisasi (contoh 3.7, 3.8, dan 3.9).

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Diketahui suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Analisis: Carilah nilai-nilai eigen dari matriks A!

Evaluasi:……………………………………………………………………………..........

…………………………………………………………………………….........................

…………………………………………………………………………….........................

Kesimpulan:

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………….....................…

………………………………………………………………………………............................

E. Diagonalisasi Ortogonal

Sekarang kita akan mendiskusikan bagaimana mencari suatu basis ortonormal dengan hasil kali dalam Euclid yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari suatu matriks A yang berukuran n x n. Sedangkan untuk menunjang pembahasan materi ini adalah pemahaman tentang matriks-matriks simetris dan pengertian ortogonal yang telah kita pelajari dari modul sebelumnya. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan dua masalah berikut yang ekuivalen.

1. Masalah vektor eigen ortonormal

   Jika diketahui suatu matriks A yang berukuran n x n, apakah ada suatu basis ortonormal untuk Rn dengan hasil kali dalam (Euclid) yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari matriks A?
2. Masalah diagonalisasi ortogonal

   Jika diketahui suatu matriks A yang berukuran n n, apakah ada suatu matriks diagonal P sedemikian sehingga matriks $D = P^{-1} A P = P^t A P$ adalah matriks diagonal?

Sebagai akibat dari permasalahan ini mendorong kita untuk membuat definisi berikut.

Definisi 1.6

Matriks A yang berukuran n x n dinamakan dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matriks P yang ortogonal, dan matriks P dikatakan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Dari definisi dan dua permasalahan di atas ada dua pelajaran yang perlu mendapat perhatian kita, yaitu:

1. Matriks manakah yang dapat didiagonalisasi secara ortogonal?
2. Bagaimana kita mencari suatu matriks ortogonal untuk melakukan diagonalisasi?

Sehubungan dengan pertanyaan-pertanyaan di atas, maka tentunya tidak ada harapan lagi bagi kita untuk mendiagonalisasi suatu matriks A, kecuali jika matriks A adalah matriks simetris. (yaitu $A = A^t$). Untuk melihat mengapa hal tersebut demikian adanya, misalkan

$$P^t A P = D \quad \text{...} \quad (1)$$

Dengan P adalah matriks ortogonal dan D adalah matriks diagonal. Karena P ortogonal, maka P^t

$$P = P^t P = I$$

sehingga persamaan (1) bisa kita tulis dalam bentuk:

$$A = P D P^t \quad \text{...} \quad (2)$$

Karena D matriks diagonal, maka $D = D^t$, sehingga dengan mentranspos kedua ruas dari persamaan (2) didapatkan

$$A^t = (P D P^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = P D P^t = A$$

sehingga A pastilah merupakan matriks simetris.

Sekarang kita perhatikan teorema berikut merupakan alat utama untuk menentukan apakah sebuah matriks dapat didiagonalisasi secara ortogonal.Teorema berikut juga menunjukkan bahwa setiap matriks simetris, pada kenyataannya dapat didiagonalisasi secara ortogonal. Perlu pula diketahui bahwa pada teorema ini dan teorema berikutnya dari bahasan ini, pengertian ortogonal akan berarti ortogonal berkenaan dengan hasil kali dalam Euclid.

Teorema 1.4

Jika A adalah suatu matriks n x n, maka pernyataan berikut adalah ekuivalen. (a) A dapat didiagonalisasi secara ortogonal. (b) A merupakan suatu himpunan n vektor eigen yang ortonormal (c) A adalah matriks simetrik.

Bukti:

(a) $\Leftrightarrow$ (b). Karena A dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang ortogonal, sedemikian hingga P^{-1} A P adalah matriks diagonal. Seperti telah diperlihatkan pada bahasan yang lalu bahwa n vektor kolom dari P adalah vektor-vekor eigen dari A. Karena P ortogonal, maka vektor-vektor kolom ini ortonormal, sehingga A mempunyai n vektor eigen yang ortonormal.

(b) $\Leftrightarrow$ (a). Misalkan A mempunyai himpunan n vektor eigen yang ortonormal $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Seperti telah diperlihatkan bahwa untuk P dengan vektor-vektor eigen ini sebagai kolom-kolomnya akan mendiagonalisasi A. Karena vektor-vektor eigen ini ortonormal, maka P ortogonal sehingga akan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

(a) $\Leftrightarrow$ (c). Pada pembuktian (a) (b) kita telah memperlihatkan bahwa suatu matriks A berukuran n x n dapat didiagonalisasi oleh matriks P yang berukuran n x n secara orthogonal yang kolom-kolomnya membentuk himpunan ortonormal dari vektor-vektor eigen matriks A. Selanjutnya, misalkan O matriks diagonal, maka

$$\boxed{\mathbf{D = P^{-1}\ A}}$$

Jadi,

$$\boxed{\mathbf{A = P\ D\ P^{-}}}$$

atau karena P orthogonal, maka

$$\boxed{\mathbf{A = P\ D\ P^{t}}}$$

Dengan demikian,

$$\mathbf{A^t = (P\ D\ P^t)^t = P\ D^t\ P^t = P\ D\ P^t =}$$

yang menunjukkan bahwa matriks A adalah matriks simetris.

(c) $\Leftrightarrow$ (a). Bukti bagian ini di luar ruang lingkup bahasan pembelajaran modul ini, dan pembuktiannya akan diabaikan.

Sekarang kita beralih ke masalah mencari prosedur untuk mendapatkan matriks P yang ortogonal untuk mendiagonalisasi matriks simetris. Namun sebelumnya kita perlu suatu teorema kritis yang berikut sebagai kunci yang berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks simetris.

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Jika sebuah matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Analisis: Hitunglah matriks P yang mendiagonalkan matriks A!

Evaluasi:…………………………………………………………………………......
.
……………………………………………………………………………....................
...……………………………………………………………………………..................
..

Kesimpulan:

……………………………………………………………………………………………

Teorema 1.5

Jika A adalah suatu matriks simetris, maka vektor-vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda akan ortogonal.

Bukti: Misal λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen yang berbeda dari matriks simetris A yang berukuran n x n, dan misalkan x_1 dan x_2 adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian berturut-turut dengan λ_1 dan λ_2. Karena x_1 dan x_2 merupakan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2, maka tentunya untuk matriks A berlaku:

$$\mathbf{A\,x_1 = \lambda_1\,x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(1)}$$

$$\mathbf{A\,x_2 = \lambda_2\,x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(2)}$$

Dari persamaan (1)

$$\mathbf{(A\,x_1)^t = (\lambda_1\,x_1)^t}$$

$$\Leftrightarrow x_1^t\,A^t = \lambda_1\,x_1^t$$

$$\Leftrightarrow x_1^t\,A = \lambda_1\,x_1^t \qquad \text{(karena A simetrik)}$$

$$\Leftrightarrow x_1^t\,A\,x_2 = \lambda_1\,x_1^t\,x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(kedua ruas dikalikan dengan x_2).

Selanjutnya kedua ruas persamaan (2) dikalikan dengan x_1^t dan dari sebelah kiri sehingga kita dapatkan:

$$\mathbf{x_1^t\,A\,x_2 = \lambda_2\,x_1^t\,x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(4)}$$

Dari persamaan (3) dan (4)

$$\boldsymbol{\lambda_1 x_1^t A\, x_2 = \lambda_2\, x_1^t\, x_2}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\,(x_1^t\, x_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)}$$

Namun $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, karena λ_1 dan λ_2 dianggap berbeda. Jadi dari persamaan (5) kita dapatkan bahwa: $x_1^t\, x_2 = 0$, atau $x_1 . x_2 = 0$ atau x_1 ortogonal terhadap x_2 (terbukti).

Sebagai implikasi dari Teorema 1.5 ini, maka kita dapatkan prosedur berikut untuk mendiagonalisasi suatu matriks simetris secara ortogonal.

Tahap 1. Carilah suatu basis untuk setiap ruang eigen dari matriks A.

Tahap 2.Terapkan proses Gran-Schmidt pada setiap basis-basis ini untuk mendapatkan suatu basis ortonormal untuk setiap ruang eigen.

Tahap 3. Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang disusun pada tahap 2, dan matriks inilah yang mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Jika sebuah matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Analisis: Hitunglah matriks P yang mendiagonalkan matriks A!

Evaluasi:……………………………………………………………………………......

……………………………………………………………………………...................

……………………………………………………………………………...................

Kesimpulan:

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………...................

RANGKUMAN

1. Jika A matriks m x n, maka vektor x yang tidak nol di R^n disebut vektor eigen (eigen vektor) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigen value) dari A.

2. Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ dengan λ sebagai variabel disebut persamaan karakteristik dari matriks A. Akar-akar atau skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen (nilai-nilai karakteristik) dari matriks A. $\mathrm{Det}(\lambda I - A) \equiv f(\lambda)$ yaitu berupa polinom dalam λ yang dinamakan polinom karakteristik.

3. Jika A adalah suatu matriks n x n dan λ adalah suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen

   (a) λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

   (b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai penyelesaian tak trivial (non trivial).

   (c) Ada vektor x yang tidak nol dalam R^n sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$.

   (d) λ adalah suatu penyelesaian real dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$

4. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear $(\lambda I - A)x = 0$ atau $(A - \lambda I)x = 0$ dinamakan ruang eigen dari matriks A yang berukuran n x n.

5. Skalar k dinamakan nilai eigen dari transformasi linear $T: V \rightarrow V$ jika ada vektor x yang tidak nol dalam V sehingga $Tx = \lambda x$. Vektor x dinamakan vektor eigen T yang bersesuaian dengan λ. Secara ekuivalen, maka vektor eigen T yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol dalam ruang eigen

6. Suatu matriks persegi (matriks bujursangkar) A dinamakan dapat didiagonalkan (dapat didiagonalisasi) jika ada suatu matriks P yang invertibel sedemikian rupa sehingga $P^{-1}A\ P$ adalah suatu matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalkan A (mendiagonalisasi) matriks A.

7. Tahapan untuk mendiagonalkan matriks yang berukuran n x n.

Tahap 1. Carilah n vektor eigen yang bebas linear dari matriks A yang berukuran n x n. Misalnya p1, p2, ... , pn.

Tahap 2.Bentuklah matriks P yang mempunyai p_1, p_2, ... , $p_n$sebagai vektor-vektor kolomnya.

Tahap 3. Matriks $D = P^{-1}\ A\ P$ adalah matriks diagonal dengan λ_1, λ_2, ... , λ_n sebagai unsur-unsur diagonal yang berurutannya dan λi adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan pi untuk I = 1, 2, 3, …, n.

BAB 4 RUANG HASIL KALI DALAM

A. Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi

Sebuah hasil kali dalam (inner product) pada ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $<u, v>$ dengan masing – masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian sehingga aksioma – aksioma berikut terpenuhi untuk semua u , v, w di V dan semua skalar k:

(1). $<u,v> = <v,u>$	(kesimetrisan)
(2). $<u + v,w> = <u,v> + <v,w>$	(penjumlahan)
(3). $<ku,v> = k<u,v>$	(kehomogenan)
(4). $<v,v> \geq 0$ dan $<v,v> = 0$ jika hanya jika $v = 0$	(kepositifan)

Sebuah ruang vektor riil dengan hasil kali dalam (memenuhi 4 aksioma) dinamakan ruang hasil kali dalam riil.

Contoh 4.1

Menginterpretasi Masalah:

Misal $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ adalah vektor – vektor pada R_2. Tunjukan bahwa $<u,v> = 3\, u_1\, v_1 + 2\, u_2\, v_2$ adalah ruang hasil kali dalam

……………………………………………………………………………………………

Analisis:

Kita akan buktikan bahwa <u,v> memenuhi keempat aksioma diatas

Evaluasi:

(1). $\langle u,v\rangle = 3\,u_1\,v_1 + 2\,u_2\,v_2$

$= 3\,v_1\,u_1 + 2\,v_2\,u_2$

$= \langle v,u\rangle$

(2). Jika $w = (w_1,w_2)$, maka

$\langle u + v,w\rangle = 3(u_1 + v_1)w_1 + 2\,(u_2 + v_2)\,w_2$

$= 3u_1\,w_1 + 3\,v_1\,w_1 + 2\,u_2\,w_2 + 2\,v_2\,w_2$

$= (3u_1\,w_1 + 2\,u_2\,w_2) + (3\,v_1\,w_1 + 2\,v_2\,w_2)$

$= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

(3). $\langle ku,v\rangle = 3\,(ku_1)\,v_1 + 2\,(ku_2)\,v_2$

$= k\,(3\,v_1\,u_1 + 2\,v_2\,u_2)$

$= k\langle u,v\rangle$

(4). $\langle v,v\rangle = 3\,v_1\,v_1 + 2\,v_2\,v_2$

$= 3(v_1^2\,) + 2(v_2^2\,) \geq 0$ dan

$\langle v,v\rangle = 3\,v_1\,v_1 + 2\,v_2\,v_2$

$= 3(v_1^2\,) + 2(v_2^2\,)$ jika hanya jika $v_1 = v_2 = 0$ atau $v = (v_1,v_2\,) = 0$

Kesimpulan: Karena keempat aksioma diatas terpenuhi jadi, $\langle u,v\rangle = 3\,u_1\,v_1 + 2\,u_2\,v_2$ adalah ruang hasil kali dalam.

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Jika <u,v> = $3u_1v_1 + 2u_2v_2$ adalah ruang hasil kali dalam di R^3

Analisis: Hitunglah <u,v> untuk u = (-2, 1), v = (1, 4).

Evaluasi:………………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………………........................

……………………………………………………………………………........................

Kesimpulan: ……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………........................

Contoh 4.2

Jika u = $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ dan v = $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ sebarang matriks berukuran 2 x 2. Untuk u, v $\in$ M_{2x2} didefinisikan operasi bernilai riil (u,v) =

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}\right) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

Apakah operasi ini merupakan hasil kali dalam?

Solusi:

1. Ambil $a, b \in M_{2\times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, maka

   $(a,b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ {komutatif perkalian bilangan riil}

   $(a,b) = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4$ {definisi operasi (u, v)}

2. Ambil $a, b, c \in M_{2\times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, c\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ maka

   $(a+b,c) = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_3+b_3)c_3 + (a_4+b_4)c_4$ {distributif bilangan riil}

   $(a+b,c) = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4)$ {definisi operasi (u, v)}

   $(a+b,c) = (a,c) + (b,c)$

3. Ambil $a, b \in M_{2\times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, ambil $k \in R$ maka

   $(ka,b) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3 + (ka_4)b_4$ {distributif bilangan riil}

   $(ka,b) = k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)$ {definisi operasi (u,v)}

   $(ka,b) = k(a,b)$

4. Ambil $a \in M_{2\times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, maka

   $(a,a) = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + a_4a_4 \geq 0$ {sifat kuadrat bilangan riil}

   $(a,a) = 0,\ jika\ \ a_1 = 0,\ \ a_2 = 0,\ a_3 + 0,\ a_4 = 0,\ \ atau\ \ a = 0$

   Jadi, operasi bernilai riil diatas merupakan hasil kali dalam

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Jika a. u = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ v = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b. u = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ v = $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Analisis: Hitunglah <u,v>

Evaluasi:……………………………………………………………………………….........

…………………………………………………………………………….........................

…………………………………………………………………………….........................

Kesimpulan: ……………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………….........................

Sifat-Sifat

Jika u, v, w adalah vektor – vektor dalam ruang hasil kali dalam riil dan k sembarang skalar, maka:

(a). $<0,v> = <v,0> = 0$

(b). $<u,v + w> = <u,v> + <u,w>$

(c). $<u,kv> = k<u,v>$

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah:

…………………………………………………………………………………………........................
..

…………………………………………………………………………………………........................
..

Analisis: Dari sifat-sifat diatas, buktikan untuk poin a,b dan c

Evaluasi:…………………………………………………………………………………........
..

…………………………………………………………………………………………........................
.

…………………………………………………………………………………………........................

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Misal $u = (2, -1)$, $v = (0, -5)$, $k = -3$

Analisis: Hitunglah:

a. $< u, v >$
b. $< u + v, w >$
c. $< ku, v >$

Evaluasi:……………………………………………………………………………........
.

…………………………………………………………………………........................

…………………………………………………………………………........................
.

Kesimpulan:
……………………………………………………………………………..

RANGKUMAN

Definisi: Sebuah hasil kali dalam (inner product) pada ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $<u, v>$ dengan masing – masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian sehingga aksioma – aksioma berikut terpenuhi untuk semua u , v, w di V dan semua skalar k:

(1). $<u,v> = <v,u>$ (kesimetrisan)

(2). $<u + v,w> = <u,v> + <v,w>$ (penjumlahan)

(3). $<ku,v> = k<u,v>$ (kehomogenan)

(4). $<v,v> \geq 0$ dan $<v,v> = 0$ jika hanya jika $v = 0$ (kepositifan)

Sebuah ruang vektor riil dengan hasil kali dalam (memenuhi 4 aksioma) dinamakan ruang hasil kali dalam riil.

BAB 5 TRANSFORMASI LINIER

A. Transformasi Linier

Transformasi linier dari R^n ke R^mmerupakan transformasi matriks. Jika T: $R^n \to R^m$ adalah sebagai transformasi linier, maka ada matriks A berukuran m x n sehingga T adalah perkalian oleh A. misalkan e_1, e_2, …, e_n adalah basis baku untuk R_n, dan misalkan A adalah matriks m x n yang mempunyai $T(e_1)$, $T(e_2)$, …, $T(e_n)$ sebagai vektor-vektor kolomnya.

Jika T: $R^2 \to R^2$ diberikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad dan \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ T(e_1) & T(e_2) \end{matrix}$$

Secara umum, jika

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(e_1) & T(e_2)\dots & T(e_n) \end{matrix}$$

Matriks ini dinamakan matriks bentuk baku untuk T. Akan ditunjukkan bahwa transformasi linier $T:R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian A.

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

Maka karena kelinieran T adalah

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \dots + x_nT(e_n) \qquad (2)$$

Sebaliknya

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \dots + x_nT(e_n) \qquad (3)$$

Dengan membandingkan (2) dan (3) maka akan menghasilkan T(x) = A(x) yakni T adalah perkalian oleh A. sehingga dapat dirangkum dalam teorema:

Teorema 5

Jika T: $R^n \rightarrow R^m$ adalah transformasi linier dan jika $e_1, e_2, \ldots, e_n$ adalah basis baku untuk R^n, maka T adalah perkalian oleh A, di mana A matriks yang menghasilkan vektor kolom $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$.

Contoh 5.1

Carilah matriks baku untuk transformasi T: $R^3 \rightarrow R^4$ yang didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Pemecahan:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan $T(e_1)$, $T(e_2)$, dan $T(e_3)$ sebagai vektor-vektor kolom, maka kita peroleh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sebagai pemeriksaan, perhatikanlah bahwa:

$$A=\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan rumus yang diberikan untuk T.

Disini kita dihadapkan dengan pertanyaan yang menarik untuk perhatikan. Anggaplah bahwa kita mengawalinya dengan matriks A yang berukuran n x n dan kita definisikan T: $R^n \rightarrow R^m$ terhadap perkalian oleh A. dengan bergantung pada teorema 5, transformasi linier T. jadi, T merupakan perkalian baik oleh A maupun $[T(e_1)|T(e_2)|\ldots|T(e_n)]$. Bagaimana kedua matriks ini saling berhubungan dengan lainnya? Contoh berikut akan menjawab pertanyaan ini.

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Tunjukan bahwa $T{:}R^2 \rightarrow R^3$, dimana $T = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$

Analisis: Apakah $T:R^2 \rightarrow R^3$ merupakan transformasi linear!

Evaluasi:……………………………………………………………………………….....
.
………………………………………………………………………………......................
.
………………………………………………………………………………......................
.
Kesimpulan: ………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………......................

....

Contoh 5.2

Misalkan T: $R^n \rightarrow R^m$ adalah perkalian oleh

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Carilah matriks baku untuk T.

Pemecahan:

Vektor-vektor T(e_1), T(e_2), …,T(e_n) adalah vektor-vektor kolom yang berurutan dari A, misalnya

$$T(e_1) = A(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks baku untuk T adalah $\left[T(e_1)\middle|T(e_2)\middle|\dots\middle|T(e_n)\right] = A$

Sebagai ikhtisar, maka matriks baku untuk transformasi matriks adalah matriks itu sendiri.

Contoh 2 menyatakan sebuah cara baru untuk memikirkan matriks. Matriks sebarang A yang berukuran m x n dapat anda tinjau sebagai matriks baku untuk transformasi linier yang memetakan basis baku bagi R^n ke dalam vektor-vektor kolom dari A.

jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Adalah matriks baku untuk transformasi liner dari R^3 ke R^2 yang memetakan

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Secara berurutan kedalam

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Pada bagian selebihnya dari bagian ini kita akan menelaah sifat geometrik mengenai transformasi linier bidang, yakni transformasi linier dari R^2 ke R^2.

Jika T: $R^2 \rightarrow R^2$ adalah transformasi seperti itu dan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Adalah matriks baku untuk T, maka:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Ada dua tafsiran geometrik dari rumus ini yang sama baiknya. Kita dapat meninjau entri-entri dalam matriks-matriks:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \; dan \; \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Baik sebagai komponen-komponen vektor maupun sebagai koordinat-koordinat titik. Dengan tafsiran yang pertama, T memetakan panah menjadi panah, dan dengan tafsiran yang kedua, T memetakan titik menjadi titik.Pilihan tersebut hanyalah alternatif bagi anda.Dalam pembahasan berikutnya, kita meninjau transformasi linier bidang sebagai pemetaan titik ke titik.

Contoh 5.3

Menginterpretasi Masalah: Misalkan T: $R^2 \to R^2$ adalah transformasi linier yang memetakan masing-masing titik ke dalam bayaran simetriknya terhadap sumbu y.

Analisis: Carilah matriks baku untuk T.

Evaluasi:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan $T(e_1)$ dan $T(e_2)$ sebagai vektor-vektor kolom akan kita peroleh matriks baku

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan: Sebagai pemeriksaaan, maka

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Sehingga perkalian oleh A akan memetakan titik $(x,\ y)$ ke dalam bayangan simtriknya $(-x, y)$ terhadap sumbu y.

Latihan soal

Menginterpretasi Masalah: Diberikan $T\left(\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}, T\left(\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, T\left(\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\right) =$

$\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix}$

Misal $T: R^3 \to W$ adalah transformasi matriks.

Analisis: Carilah $T\left(\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\right)$ dan $T\left(\begin{vmatrix}1\\3\\8\end{vmatrix}\right)$

Evaluasi:……………………………………………………………………………........

……………………………………………………………………….......................

……………………………………………………………………….......................

Kesimpulan: ……………………………………………………………………………

Terdapat lima jenis transformasi linier bidang yang mempunyai makna khusus :

Perputaran (rotasi), refleksi, ekspansi, kompresi, dan geseran.

1. **Perputaran(rotasi)**

Jika $T:R^2 \rightarrow R^2$ untuk masing-masing titik dalam bidang terhadap titik asal atau O(0,0) melalui sudut, kita dapatkan bahwa matriks baku untuk T adalah

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

2. **Refleksi**

Refleksi terhadap sebuah garis l melalui titik asal adalah transformasi yang memetakan masing-masing titik pada bidang ke dalam bayangan cerminnya terhadap l. refleksi adalah transformasi liner. Kasus yang paling penting adalah refleksi terhadap sumbu koordinat dan garis y = x.

Refleksi terhadap sumbu *y* adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Refleksi terhadap sumbu *x* adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Refleksi terhadap garis *y* = *x* adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. **Ekspansi dan kompresi**

Jika koordinat *x* dari masing-masing titik pada bidang dikalikan dengan konstanta *k* yang positif, maka efeknya adalah memperluas atau mengkompresi masing-masing gambar dalam arah *x*.

Jika :

a. $0 < k < 1$, maka hasilnya adalah kompresi,

b. $k > 1$, maka hasilnya adalah ekspansi.

Transformasi yang demikian dinamakan ekspansi (atau kompresi) dalam arah *x* dengan faktor *k*. demikian juga jika koordinat *y* dari masing-masing titik dikalikan dengan konstanta *k* positif, maka didapatkan sebuah ekspansi (atau kompresi) dalah arah *y* dengan faktor *k*. ekspansi dan kompresi sepanjang sumbu-sumbu koordinat adalah transformasi linier.

Jika T: $R^2 \to R^2$ adalah ekspansi atau kompresi dalam arah *x* dengan faktor *k*, maka

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Sehingga matriks baku untuk T adalah

$$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Demikian juga matriks baku untuk ekspansi atau kompresi untuk arah *y* adalah

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$$

4. Geseran

Sebuah geseran dalam arah *x* dengan faktor *k* adalah tranformasi yang menggerakkan masing-masing titik (x, y) sejajar dengan sumbu *x* sebanyak *ky* menuju kedudukan yang baru $(x + ky, y)$.

Dibawah transformasi seperti itu, titik-titik pada sumbu *x* tidak digerakkan karena $y = 0$. Akan tetapi, sewaktu kita makin menjauh dari sumbu *x*, besar *y* bertambah, sehingga titik-titi yang lebih jauh dari sumbu x bergerak sejarak yang lebih besar dari titik-titik yang lebih dekat kesumbu x tersebut.

Matriks baku

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Yang membawa vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ke $\begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$ disebut pergeseran dalam arah x.

Sejalan dengan itu, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

membawa vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ke $\begin{bmatrix} x \\ y+kx \end{bmatrix}$ dan disebut pergeseran dalam arah y.

Sebuah geseran dalam arah y dengan faktor k adalah transformasi yang menggerakkan masing-masing titik (x, y) sejajar dengan sumbu y sebanyak kx menuju kedudukan yang baru (x, y + kx).

Dibawah transformasi seperti ini, maka titik-titik pada sumbu y tetap diam dan titik-titik yang lebih jauh dari sumbu y bergerak sejarak yang lebih besar dari titik-titik yang lebih dekat ke sumbu y tersebut.

Dapat kita perlihatkan bahwa geseran adalah transformasi linier. Jika T: $R^2 \rightarrow R^2$ adalah searah dengan faktor k yang mengarah x, maka

$$\boxed{T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Sehingga matriks baku untuk T adalah

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Demikian juga, matriks baku untuk geseran dalam arah y dengan faktor k adalah: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Pernyataan

Perkalian dengan matriks identitas 2 x 2 memetakan masing-masing titik ke dalam dirinya sendiri.Ini dinamakan transformasi identitas. Jika diperlukan, maka transformasi ini dapat ditinjau sebagai perputaran melalui 0^{o} atau sebagai geseran sepanjang salah satu sumbu dengan $k = 0$, atau sebagai kompresi atau ekspansi sepanjang salah satu sumbu dengan faktor $k = 1$.

Contoh 5.4

Menginterpretasi Masalah: Misalkan bahwa bidang tersebut diputar melalui sudut θ dan kemudian dipengaruhi oleh geseran yang faktornya k dalam arah x.

Analisis: Carilah transformasi matriks tunggal yang menghasilkan efek yang sama seperti kedua transformasi yang berurutan tersebut.

Evaluasi: Dibawah perputaran titik (x, y) ditransformasikan kedalam titik (x', y') dengan koordinat yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dibawah geseran, titk (*x', y'*) ditransformasikan kedalam titik (*x'', y''*) dengan koordinat yang diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{..(2)}$$

Dengan menyulihkan (1) ke (2) maka akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta + k\sin\theta & -\sin\theta + k\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Kesimpulan: Jadi, putaran yang diikuti oleh geseran dapat dilakuakn oleh transformasi matriks dengan matriks

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + k\sin\theta & -\sin\theta + k\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: Misalkan suatu bidang dirotasikan melalui sudut θ dan kemudian dipengaruhi oleh geseran yang faktornya k di dalam arah x.

Analisis: Carilah sebuah transformasi matriks tunggal yang menghasilkan efek yang sama seperti kedua transformasi yang berurutan tersebut.

Evaluasi:...

....

....

Kesimpulan: ....

....

....

Umumnya, jika transformasi-transformasi matriks

$$T_1(x) = A_1 x, \quad T_2(x) = A_2 x, \ldots T_k(x) = A_k x$$

Dari R^n ke R^ndilakukan berurutan (mula-mula T_1, lalu T_2, dan seterusnya), maka hasilnya yang sama dicapai dengan sebuah transformasi matriks tunggal T (x) = Ax, dimana

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_k} \ldots$$

Perhatikan bahwa urutan yang transformasinya telah dilakukan dapat diperoleh dengan membaca urutan dari kanan ke kiri dalam.

Latihan Soal

Menginterpretasi Masalah: ……………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

Analisis: (a) Carilah transformasi matriks dari R^2 ke R^2 yang mula-mula menggeser dengan faktor sebesar 2 dalam arah x dan kemudian merefleksikannya terhadap $y = x$. (b) Carilah transformasi matriks dari R^2 ke R^2 yang mula-mula merefleksikannya terhadap $y = x$ dan kemudian menggeser dengan sebuah faktor sebesar 2 dalam arah x.

Evaluasi:

………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………….

Perhatikan bahwa $A_1A_2 \neq A_2A_1$, sehingga efek penggeseran dan kemudian merefleksikannya, berbeda dari efek refleksi yang diikuti oleh penggeseran. Ini dilukiskan secara geometris dalam Gambar di bawah ini, dimana kita memperlihatkan efek transformasi pada sebuah segiempat siku-siku.

Contoh 5.5

Menginterpretasi Masalah:

Perhatikanlah bahwa jika T: $R^2 \to R^2$ adalah perkalian oleh sebuah matriks elementer, maka transformasi tersebut adalah salah satu dari antara yang berikut:

(a) Geseran sepanjang sumbu koordinat.

(b) Refleksi terhadap $y = x$.

(c) Kompresi sepanjang sumbu koordinat.

(d) Ekspansi sepanjang sumbu koordinat.

(e) Refleksi terhadap sumbu koordinat.

(f) Kompresi atau ekspansi sepanjang sumbu koordinat yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu koordinat.

Analisis:

Karena matriks elementer 2×2 dihasilkan dengan melakukan operasi baris elementer tunggal terhadap matriks identitas 2×2, maka matriks elementer tersebut harus mempunyai salah satu dari bentuk berikut (buktikan):

Diketahui mariks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ yaitu matriks yang menyatakan geseran sepanjang sumbu koordinat. Kemudian $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ yaitu matriks yang menyatakan refleksi terhadap $y = x$.

Jika $k > 0$, maka matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ menyatakan kompresi atau ekspansi

Jika $k < 0$, dan jika kita nyatakan k dalam bentuk $k = -k_1$, dimana $k_1>0$, maka kedua matriks tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

Evaluasi:

Jika $0 > k$, maka hasil kali dalam matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ menyatakan kompresi atau ekspansi sepanjang sumbu x yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu y, dan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$ menyatakan komperensi atau ekspansi sepanjang sumbu y yang diikuti oleh refleksi terhadap sumbu x.

Jika di dalam kasus $k = -1$, maka matriks $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$ adalah refleksi berurutan terhadap sumbu y dan sumbu x.

Misalkan jika $T:R^2 \to R^2$ adalah perkalian oleh sebuah matriks A yang dapat **dibalik** dan misalkan bahwa T memetakan titik (x, y) ketitik (x', y'), maka

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ Dan}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Kesimpulan: Dari persamaan terebut bahwa jika perkalian A memetakan (x, y) ke (x', y'), maka perkalian A^{-1} memetakan (x', y') kembali kedudukannya yang semula (x, y). oleh karena itu, maka perkalian itu, maka perkalian oleh A dan perkalian oleh A^{-1} dikatakan sebagai transformasi-transformasi invers.

Contoh 5.7

Jika T:$R^2 \rightarrow R^2$ mengkompresi bidang dengan sebuah faktor sebesar $\frac{1}{2}$ dalam arah y, maka jelaslah secara intuitif bahwa kita harus memperluas bidang tersebut dengan sebuah faktor sebesar 2 dalam arah y untuk memindahkan masing-masing titik kembali ke kedudukannya yang semula sesungguhnya demikianlah kasusnya, karena

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ menyatakan kompresi yang faktornya $\frac{1}{2}$ dalam arah y, dan

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ekspansi yang faktornya 2 dalam arah y.

RANGKUMAN

1. Transformasi linier dari R^n ke R^m merupakan transformasi matriks. Jika T: $R^n \rightarrow R^m$ adalah sebarabg transformasi linier, maka ada matriks A berukuran m x n sehingga T adalah perkalian oleh A. misalkan e_1, e_2, …, e_n adalah basis baku untuk R_n, dan misalkan A adalah matriks m x n yang mempunyai $T(e_1)$, $T(e_2)$, …, $T(e_n)$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
2. Terdapat lima jenis transformasi linier bidang yang mempunyai makna khusus:
   - Perputaran (rotasi)
     Jika T : $R^2 \rightarrow R^2$ untuk masing-masing titik dalam bidang terhadap titik asal atau O (0,0) melalui sudut, kita dapatkan bahwa matriks baku untuk T adalah
   - Refleksi
     Refleksi terhadap sebuah garis l melalui titik asal adalah transformasi yang memetakan masing-masing titik pada bidang ke dalam bayangan cerminnya terhadap l. refleksi adalah transformasi liner. Kasus yang paling penting adalah refleksi terhadap sumbu koordinat dan garis y = x
   - Ekspansi dan kompresi
     Jika koordinat *x* dari masing-masing titik pada bidang dikalikan dengan konstanta *k* yang positif, maka efeknya adalah memperluas atau mengkompresi masing-masing gambar dalam arah *x*.
   - Geseran
     Sebuah geseran dalam arah *x* dengan faktor *k* adalah tranformasi yang menggerakkan masing-masing titik (x, y) sejajar dengan sumbu *x* sebanyak ky menuju kedudukan yang baru $(x + ky, y)$.

PROFIL

Nama : IRA VAHLIA

TTL : Metro, 6 Desember 1989

Alamat : Jl Tiram 21 Yosodadi Metro Timur

Email : iravahlia56@gmail.com

Riwayat Pendidikan:

S1 Pend. Matematika Universitas Muhammadiyah Metro

S2 pend. Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta

Nama : DWI RAHMAWATI

TTL : Sukoharjo, 10 April 1983

Alamat : Dusun III RT/RW 011/005

Email : dwirahmawati1083@gmail.com

Riwayat Pendidikan:

S1 Pend. Matematika Univ. Sebelas Maret Surakarta

S2 Pend. Matematika Univ. Sebelas Maret Surakarta

S3 Pend. Matematika Universitas Negeri Malang

Nama : MUSTIKA

TTL : Palembang, 4 Maret 1983

Alamat : Jl R.Imba Kusuma No. 29 Metro Pusat

Email : mustika@ummetro.ac.id

Riwayat Pendidikan:

S1 Sistem Informatika (STMIK Palcomtech)

S2 *Software Enginnering* (Universitas Bina Darma)

Nama : TINA YUNARTI

TTL : Tanjung Karang, 10 Juni 1966

Alamat : Jalan Bumi Manti III No. 80, Kampung Baru
Labuhan Ratu, Bandar Lampung

Email : tina_yunarti@yahoo.com

Riwayat Pendidikan:

S1 Pend. Matematika FKIP Universitas Lampung

S2 pend. Matematika Universitas Gadjah Mada

S3 Pend, Matematika Universitas Pendidikan Indonesia

Nama : NURHANURAWATI

TTL : Kotabumi, 8 Agustus 1967

Alamat : Jl. Durian II No. 24 Kel. Waydadi Kec. Sukarame,
Bandar Lampung

Email : nurhanurawati94@gmail.com

Riwayat Pendidikan:

S1 Pend. Matematika Universitas Lampung

S2 Pend. Matematika Universitas Negeri Malang

S3 Pend. Matematika Universitas Negeri Malang

DAFTAR PUSTAKA

Karso.*Nilai Eigen, Vektor Eigen dan Diagonalisasi Metriks.* Direktorat file UPI.

Lestari, Dewi. *2012. Materi Aljabar Linear Lanjut Transformasi Linier Dari* R^n *Ke* R^m*; Geometri Transformasi Linier Dari* R^2 *KE* R^2. Yogyakarta: UNY.

Marjono dan Marsudi. 2012. Aljabar Linear. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press)

Syaputri, dkk. 2015.*Aljabar Linear Elementer“ Ruang Hasil Kali Dalam “*. Padang: Universitas Negeri Padang.

PENERBIT LEMBAGA PENELITIAN UM METRO

Ki Hajar Dewantara No. 116 Metro Kecamatan Metro Timur Kota Metro, 34111
Telp/Fax (0725) 42445
Email : lemlit.ummetro@gmail.com Website : www.lppm.ummetro.ac.id

Nomor : 0145/II.3.AU/LPPM/2021
Lampiran : 1 berkas
Perihal : Surat Keterangan Terbit Buku

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Dr. Achyani, M.Si.
Jabatan : Pimpinan Penerbit Lembaga Penelitian UM Metro
Alamat Penerbit : Jl. Ki Hajar Dewantara No. 116 Kota Metro Lampung

Menyatakan bahwa buku yang berjudul" Aljabar Linear (Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis) dengan spesifikasi sebagai berikut:

Penerbit : Lembaga Penelitian UM Metro
No ISBN : 978-623-90328-8-3
Penulis : 1. Ira Vahlia, M.Pd.
2. Dr. Dwi Rahmawati, M.Pd.
3. Mustika, M.Kom.
4. Dr. Tina Yunarti, M.Si.
5. Dr. Nur Hanurawati, M.Pd.
Editor : 1. Dr. Sudarman, M.Pd.
2. Dr. Sutrisni Andayani, M.Pd.
3. Rahmad Bustanul Anwar, M.Pd.

Jumlah Cetakan : 30 Exsemplar

Telah kami terbitkan dipenerbit Lembaga Penelitian UM Metro
Demikian surat keterangan terbit ini kami buat agar digunakan sebagaimana mestinya.
Atas perhatian dan kerjasamanya kami ucapkan terimakasih.

Metro, 20 September 2021
Pimpinan Penerbit,

Dr. Achyani, M.Si.
NIP. 19640815 1989031003

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN (FKIP)

Alamat : Jl. Ki Hajar Dewantara No. 116 Iringmulyo Kota Metro Telp./Fax. (0725) 42445 - 42454 Kode Pos 34111
www.fkip.ummetro.ac.id

SURAT TUGAS

NO: 478/II.3 AU/F/S.TGS FKIP/UMM/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

Berdasarkan pelaksanaan kegiatan Tridharma Perguruan Tinggi, maka Dekan FKIP UMMetro menugaskan kepada:

No	Nama	NIDN
1	Ira Vahlia, M. Pd	0206128901
2	Dr. Dwi Rahmawati, M. Pd	0210048303

Untuk melaksanakan kegiatan penelitian "Pengembangan E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates Berbantu Aplikasi Android Untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis dan Hasil Belajar Mahasiswa" pada bulan Juni sampai dengan November 2021. Kegiatan ini melibatkan mahasiswa:

No	Nama	NPM
1	Rahmayani	17310009
2	Aji Ma'ruf	17310013

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya dan selesai melaksanakan tugas agar dapat melaporkan hasilanya kepada Dekan.

Metro, 17 Juni 2021
Dekan,

Drs. Partono, M. Pd
NIP. 19660413 199103 1 003

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN (FKIP)

Alamat : Jl. Ki Hajar Dewantara No. 116 Iringmulyo Kota Metro Telp./Fax. (0725) 42445 - 42454 Kode Pos 34111
www.fkip.ummetro.ac.id

SURAT KETERANGAN PENELITIAN PAYUNG

NO: 479/II.3 AU/F/S.TGS FKIP/UMM/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

Berdasarkan pelaksanaan kegiatan Tridharma Perguruan Tinggi, maka Dekan FKIP UMMetro menerangkan bahwa:

Nama : Ira Vahlia, M. Pd
NIDN : 0206128901
Nama : Dr. Dwi Rahmawati, M. Pd
NIDN : 0210048303
Judul : Pengembangan E-Modul Aljabar Linear Berbasis Socrates Berbantu Aplikasi Android Untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis dan Hasil Belajar Mahasiswa

Pada bulan Juni sampai dengan November 2021 telah melakukan penelitian 26 bersama mahasiswa:

No	Nama	NPM	Judul Penelitian
1	Rahmayani	17310009	PENGEMBANGAN MODUL MATEMATIKA BERBASIS PENDEKATAN KONTEKSTUAL (CONTEXTUAL TEACHING AND LEARNING) DISERTAI QR CODE PADA MATERI LOGARITMA KELAS X
2	Aji Ma'ruf	17310013	PENGEMBANGAN BAHAN AJAR MODUL BERBANTU QUICK RESPONSE CODE (QR CODE) PADA MATA PELAJARAN MATEMATIKA POKOK BAHASAN TRANSFORMASI GEOMETRI KELAS XI SMK MUHAMMADIYAH 3 METRO

Demikian surat keterangan ini dibuat untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya.

Metro, 17 Juni 2021
Dekan,

Drs. Partono, M. Pd
NIP. 19660413 199103 1 003